Vpisna številka:_______________ Ime in priimek:___________________________________

4. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE 2

15. maj 2008

(1) Pokaži, da je $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1)$ prosti modul nad kolobarjem $\mathbb{Z}$ in poišči njegovo bazo. Kateri končno generirani abelovi grupi je izomorfen tenzorski produkt $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x]/(x^2)$?

(2) Izračunaj tenzorski produkt $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1) \otimes_{\mathbb{Z}[x]} \mathbb{Z}[x]/(x^2)$.

(3) (UM+TM)
Naj bo M mreža vseh idempotentov komutativnega kolobarja K (za operaciji $e \cap f = ef$ in $e \cup f = e + f - ef$). Pokaži, da sta ekvivalentni naslednji trditvi:

(a) V mreži M obstaja veriga dolžine n od 0 do 1.

(b) V mreži M obstajajo taki idempotenti $e_1, \dots, e_n$, da je $e_1 \cup \dots \cup e_n = 1$ in $e_i \cap e_j = 0$ za vse $i \neq j$.

neničelni

(PM+RM)
Naj bo M mreža vseh idempotentov kolobarja $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ (s seštevanjem in množenjem po komponentah). Pokaži, da v M obstaja kaka veriga dolžine n.

(4) Naj bo k obseg in a tak element neke njegove razširitve, da je $[k(a) : k] = 2n+1$ za neko naravno število n. Izračunaj stopnjo razširitve $[k(a^2) : k]$.

(5) Naj bo a neka ničla polinoma $p(x) = x^3 + 2x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$. Poišči minimalni polinom za element $a^2 + 1$ nad obsegom $\mathbb{Z}_3$.

$j > k$.

3) $a \Rightarrow b$: $0 \le e_1 \le e_2 \le \dots \le e_n = 1 \Rightarrow e_1, e_2 - e_1, e_3 - e_2, \dots$

$(e_j - e_{j-1})(e_k - e_{k-1}) =$

$b \Rightarrow a$: $0, e_1, e_1 \cup e_2, e_1 \cup e_2 \cup e_3, \dots, 1$

$e_k - e_k - e_{k-1} + e_{k-1} = 0$