Algebraične krivulje
Izpit 22. junij 2009

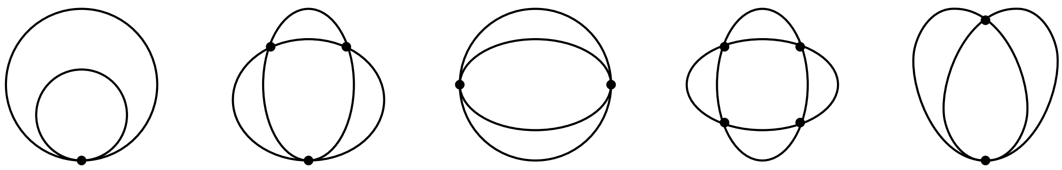
1. Krivlja C v afini ravnini je podana s polinomom

$$F = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \cdots .$$

   Izrazi potrebne pogoje v odvisnosti od koeficientov a_{ij} tako da:

   - $P = (0,0) \in C$,
   - premica $y = 0$ je tangenta na C v točki P,
   - P je prevojna točka na C s prevojno tangento $y = 0$.

2. Spodnje slike predstavljajo vse možne preseke dveh nesingularnih kvadrik. Vsem presečnim točkam določi presečne večkratnosti. Za vsako sliko zapiši primer dveh kvadrik v $\mathbb{P}^2$ s takim presekom (tako da napišeš konkretni enačbi).



3. Poišči vse kvadrike v $\mathbb{P}^2$ skozi točke $P_1 = [1,-1,0]$, $P_2 = [1,1,0]$, $P_3 = [0,1,1]$, $P_4 = [0,3,1]$, $P_5 = [1,0,0]$ na naslednji način:
   Izračunaj vse kvadrike skozi 5 točk $R_1 = [1,0,0]$, $R_2 = [0,1,0]$, $R_3 = [0,0,1]$, $R_4 = [1,1,1]$, $R_5 = [a,b,c]$. Nato poišči projektivnost, ki $P_1,\ldots,P_5$ preslika v $R_1,\ldots,R_5$.

4. Afina singularna kubika $C : \{y = x^3\} \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ ima parametrizacijo

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\to C \\ t &\to (t, t^3). \end{aligned}$$

   Pokaži, da je ϕ izomorfizem med grupo $(\mathbb{R}, +)$ in grupo na C z nevtralnim elementom $O = (0,0)$ in lastnostjo: $P + Q + R = O$ velja natanko tedaj, ko so točke P, Q in R kolinearne.