Ime in priimek: _____ Vpisna številka: | | | | | | | | |

1: _____ 2: _____ 3: _____ 4: _____ Skupaj: _____

ALGEBRAIČNE KRIVULJE
1. IZPIT
28. junij 2010

Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

1. [20] V odvisnosti od paramatra k izračunaj presečno večkratnost premice $y = kx$ s krivuljo $(x^2 + y)^2 = xy - 2y^3$ v točki $(0, 0)$.

Rešitev. Ko vstavimo $y = kx$ v enačbo krivulje, dobimo

$$\begin{aligned}(x^2 + kx)^2 - kx^2 + 2(kx)^3 &= x^4 + 2kx^3 + k^2x^2 - kx^2 + 2k^3x^3 = \\ &= x^4 + (2k + 2k^3)x^3 + (k^2 - k)x^2 = 0.\end{aligned}$$

Presečna večkratnost v točki $(0, 0)$ je večkratnost ničle $x = 0$ v tej enačbi. Če je $k \neq 0, 1$, potem je presečna večkratnost enaka 2. Če je $k = 0$, potem se enačba glasi $x^4 = 0$, torej je presečna večkratnost enaka 4. Če pa je $k = 1$, potem se enačba glasi $x^4 + 4x^3 = 0$, torej je presečna večkratnost enaka 3.

2. [25] Poišči vse tangente na krivuljo $C: \ yx^2 - z^3 + zy^2 = 0$, ki potekajo skozi točko $[1, 0, 0]$ in zapiši njihove enačbe.

Rešitev. Izračunajmo polaro na C glede na pol $[1, 0, 0]$. Odvodi polinoma so enaki $\frac{\partial}{\partial x} = 2xy$, $\frac{\partial}{\partial y} = x^2 + 2yz$ in $\frac{\partial}{\partial z} = -3z^2 + y^2$. Enačba polare je torej $2xy = 0$. Sedaj poiščimo presečišča polare s krivuljo.

Če je $x = 0$, potem iz enačbe krivulje dobimo $-z^3 + zy^2 = z(y - z)(y + z) = 0$. Od tod dobimo tri presečne točke $[0, 1, 0]$, $[0, 1, 1]$ in $[0, 1, -1]$. Vse tri točke so gladke, zato lahko tangente poiščemo po formuli. Zaporedoma dobimo tangente $z = 0$, $y - z = 0$ in $y + z = 0$.

Če je $y = 0$, potem iz enačbe krivulje dobimo $-z^3 = 0$ oziroma $z = 0$. Od tod dobimo presečišče $[1, 0, 0]$, kar je gladka točka s tangento $y = 0$.

3. [25] Poišči projektivnost $\theta : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$, ki točke $[2, 2, -1]$, $[0, -1, 1]$, $[1, 1, 0]$ preslika zaporedoma v točke $[1, 1, 0]$, $[1, 0, 1]$, $[0, 1, 1]$, premico $y = 0$ pa preslika v premico $x + 7y + 5z = 0$.

Naj P označuje matriko te projektivnosti. Potem je

$$P\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad P\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = b\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad P\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

za neke konstante a, b, c. Poračunajmo kam P preslika standardno bazo.

$$P\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ a \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ a-c \\ b-c \end{bmatrix},$$

$$P\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = P\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a+b \\ a-c \\ b-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a-b \\ 2c-a \\ 2c-b \end{bmatrix},$$

$$P\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = P\left(2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2c \\ 2c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a \\ a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ 2c-a \\ 2c \end{bmatrix}.$$

Od tod dobimo

$$P = \begin{bmatrix} a+b & -a-b & -a \\ a-c & 2c-a & 2c-a \\ b-c & 2c-b & 2c \end{bmatrix}.$$

Premica $y = 0$ je parametrizirana z $[x, 0, z]$. Ker je

$$P\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+b)x - az \\ (a-c)x + (2c-a)z \\ (b-c)x + 2cz \end{bmatrix},$$

mora veljati

$$((a+b)x - az) + 7((a-c)x + (2c-a)z) + 5((b-c)x + 2cz) = 0.$$

Če slednje uredimo po x in z, dobimo

$$(a+b+7a-7c+5b-5c)x+(-a+14c-7a+10c)z = (8a+6b-12c)x+(-8a+24c)z = 0.$$

Ker enačba velja za vse x in z, je $8a+6b-12c = 0$ in $-8a+24c = 0$. Iz druge enačbe dobimo $a = 3c$ in nato iz prve $b = -2c$. Postavimo lahko $c = 1$. Projektivnost ima torej matriko

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. [30] Poišči projektivno algebraično krivuljo C stopnje 3, za katero velja:

- $[1,0,0]$ je točka reda 2 na C s tangentama $y=z$ in $y+z=0$,
- $[0,1,0]$ je prevojna točka na C s prevojno tangento $x=2z$,
- C vsebuje točko $[1,0,1]$.

Rešitev. V afini ravnini $x=1$ krivuljo opisuje polinom, katerega homogen del najnižje stopnje je stopnje 2. Iz razcepa tega homogenega dela pa dobimo tangenti, torej je ta homogen del enak $(y-z)(y+z)=y^2-z^2$. Polinom je torej oblike $ay^3+by^2z+cyz^2+dz^3+e(y^2-z^2)$. V projektivnem je enačba za C torej oblike

$$ay^3+by^2z+cyz^2+dz^3+e(y^2-z^2)x=0.$$

V afini ravnini $y=1$ ima C enačbo $a+bz+cz^2+dz^3+e(1-z^2)x=0$, prevojno točko $(0,0)$ in prevojno tangento $x=2z$. Presečna večkratnost tangente $x=2z$ v točki $(0,0)$ mora biti torej vsaj 3. Torej če vstavimo $x=2z$ v zadnjo enačbo, dobimo

$$a+bz+cz^2+dz^3+e(1-z^2)2z=(d-2e)z^3+cz^2+(b+2e)z+a=0$$

in ta enačba mora imeti trojno ničlo v točki $z=0$. Torej $a=0$, $b=-2e$ in $c=0$. Enačba krivulje v projektivnem je torej

$$-2ey^2z+dz^3+e(y^2-z^2)x=0.$$

Če v slednje vstavimo točko $[1,0,1]$, dobimo $d-e=0$. Enačba krivulje je torej

$$-2y^2z+z^3+(y^2-z^2)x=0.$$