1. KOLOKVIJ – REŠITVE

1. [30]

a) Poišči racionalno parametrizacijo stožnice $2x^2 + y^2 - 3y - 2 = 0$ s pomočjo družine premic, ki gredo skozi točko $(1, 0)$. Zapiši tudi enačbo pripadajoče projektivne stožnice in njeno projektivno racionalno parametrizacijo.

b) Dokaži, da je krivulja, ki je parametrizirana z

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (2\cos t - 1, \sin 2t),$$

algebraična krivulja.

Rešitev.

a) Poljubna premica skozi $(1, 0)$ (razen premica $x = 0$) ima obliko $y = k(x - 1)$. Če slednje vstavimo v enačbo stožnice in uredimo po potencah x-a, dobimo

$$(k^2 + 2)x^2 + (-2k^2 - 3k)x + (k^2 + 3k - 2) = 0.$$

Vemo, da je ena rešitev te enačbe $x = 1$ (ta ustreza presečišču $(1, 0)$), zato lahko drugo rešitev poračunamo s Hornerjevim algoritmom (rešitvi lahko poiščemo tudi s pomočjo formule za rešitve kvadratne enačbe). Kot drugo rešitev dobimo

$$x = \frac{k^2 + 3k - 2}{k^2 + 2} \qquad \text{in od tod} \qquad y = k(x - 1) = \frac{3k^2 - 4k}{k^2 + 2}.$$

Parametrizacija stožnice je torej $(x, y) = \left(\frac{k^2 + 3k - 2}{k^2 + 2}, \frac{3k^2 - 4k}{k^2 + 2}\right)$. Enačbo pripadajoče projektivne krivulje dobimo s homogenizacijo in se glasi $2x^2 + y^2 - 3yz - 2z^2 = 0$. Njeno parametrizacijo pa dobimo direktno iz zgornje parametrizacije

$$[x, y, z] = \left[\frac{k^2 + 3k - 2}{k^2 + 2}, \frac{3k^2 - 4k}{k^2 + 2}, 1\right] = [k^2 + 3k - 2, 3k^2 - 4k, k^2 + 2]$$

in če pišemo $k = \frac{s}{t}$, dobimo

$$[x, y, z] = \left[\frac{s^2}{t^2} + 3\frac{s}{t} - 2, 3\frac{s^2}{t^2} - 4\frac{s}{t}, \frac{s^2}{t^2} + 2\right] = [s^2 + 3st - 2t^2, 3s^2 - 4st, s^2 + 2t^2].$$

b) Imamo torej $x = 2\cos t - 1$ in $y = \sin 2t = 2\sin t \cos t$. Iz prve enakosti izrazimo $\cos t = \frac{x+1}{2}$. To vstavimo v drugo enakost in izrazimo $\sin t = \frac{y}{x+1}$. Če to dvoje vstavimo v enakost $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, dobimo

$$\left(\frac{x + 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x + 1}\right)^2 = 1,$$

kar lahko preuredimo v

$$(x + 1)^4 + 4y^2 = 4(x + 1)^2.$$

Torej je dana krivulja res algebraična.

2. [35] Poišči vse točke v preseku projektivnih krivulj

$$C_1 \;:\; x^2+4xy+y^2+xz-yz=0 \qquad \text{in} \qquad C_2 \;:\; x^2-2xy-2y^2+xz-yz=0$$

in s pomočjo rezultante izračunaj presečne večkatnosti v teh točkah.

Nasvet: Točka $[0,1,0]$ ne leži na nobeni premici skozi dve presečišči.

Rešitev. Če enačbi odštejemo, dobimo $6xy+3y^2=0$ oziroma $3y(2x+y)=0$.

1) Če je $y=0$, potem iz prve enačbe dobimo $x^2+xz=0$ oziroma $x(x+z)=0$. Torej je bodisi $x=0$ bodisi $x=-z$. Od tod dobimo dve presečni točki (postavimo lahko $z=1$) $[0,0,1]$ in $[-1,0,1]$.

2) Če pa je $y=-2x$, potem iz prve enačbe dobimo $-3x^2+3xz=0$ oziroma $-3x(x-z)=0$. Torej je bodisi $x=0$ bodisi $x=z$. Od tod dobimo presečni točki $[0,0,1]$ in $[1,-2,1]$.

Krivulji se torej sekata v treh točkah $[0,0,1]$, $[-1,0,1]$ in $[1,-2,1]$. Nasvet nam pove, da lahko rezultanto računamo glede na spremenljivko y. Polinoma uredimo po potencah y-a in izračunamo

$$R=\begin{vmatrix} 1 & 4x-z & x^2+xz & 0 \\ 0 & 1 & 4x-z & x^2+xz \\ -2 & -2x-z & x^2+xz & 0 \\ 0 & -2 & -2x-z & x^2+xz \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4x-z & x^2+xz & 0 \\ 0 & 1 & 4x-z & x^2+xz \\ 0 & 6x-3z & 3x^2+3xz & 0 \\ 0 & 0 & -6x-3z & 3x^2+3xz \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4x-z & x^2+xz \\ 6x-3z & 3x^2+3xz & 0 \\ 0 & -6x-3z & 3x^2+3xz \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 9 \begin{vmatrix} 1 & 4x-z & x^2+xz \\ 2x-z & x^2+xz & 0 \\ 0 & 2x-z & x^2+xz \end{vmatrix} \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=} 9 \begin{vmatrix} 1 & 2x & 0 \\ 2x-z & x^2+xz & 0 \\ 0 & 2x-z & x^2+xz \end{vmatrix} = 9(x^2+xz) \begin{vmatrix} 1 & 2x \\ 2x-z & x^2+xz \end{vmatrix} =$$

$$= 9x(x+z)(-3x^2+3xz) = -27x^2(x+z)(x-z).$$

V (1) smo 3. vrstici prišteli 2-kratnik 1. in 4. vrstici prišteli 2-kratnik 2., v (2) smo iz 2. in 3. vrstice izpostavili 3, v (3) pa smo 1. vrstici odšteli 3. vrstico. Enačbi $x=0$ ustreza točka $[0,0,1]$, enačbi $x+z=0$ ustreza točka $[-1,0,1]$ in enačbi $x-z=0$ ustraza točka $[1,-2,1]$. Presečne večkratnosti v točkah $[0,0,1]$, $[-1,0,1]$ in $[1,-2,1]$ so torej zaporedoma enake 2, 1 in 1.

3. [35] Dana je projektivna krivulja

$$C : (y^2 - xz)^2 + (y^2 - 2x^2)z^2 = 2y^3 z.$$

a) Dokaži, da sta $[1,0,0]$ in $[0,0,1]$ singularni točki krivulje C.

b) Izračunaj njune rede in določi vse tangente v teh dveh točkah.

c) Zapiši enačbo tangente v točki $[0,1,1]$ in izračunaj njeno presečno večkratnost s krivuljo C v vseh točkah preseka.

d) Ali na C obstaja še kaka druga singularna točka?

Rešitev. Enačbo krivulje preuredimo v $y^4 - 2y^3z - 2xy^2z + y^2z^2 - x^2z^2 = 0$.

a) Označimo $P = [1,0,0]$ in $Q = [0,0,1]$. Če polinom zgoraj označimo z F, potem je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= -2y^2z - 2xz^2,\\
\frac{\partial F}{\partial y} &= 4y^3 - 6y^2z - 4xyz + 2yz^2,\\
\frac{\partial F}{\partial z} &= -2y^3 - 2xy^2 + 2y^2z - 2x^2z.
\end{aligned}$$

Od tod zlahka poračunamo, da je $\frac{\partial F}{\partial x}(P) = \frac{\partial F}{\partial y}(P) = \frac{\partial F}{\partial z}(P) = 0$ in $\frac{\partial F}{\partial x}(Q) = \frac{\partial F}{\partial y}(Q) = \frac{\partial F}{\partial z}(Q) = 0$, kar pomeni, da sta P in Q singularni točki.

b) Red točke $P = [1,0,0]$ moramo določiti v afini ravnini $x = 1$. Enačba krivulje se tam glasi

$$y^4 - 2y^3z - 2y^2z + y^2z^2 - z^2 = 0.$$

Ker točki P v ravnini $x = 1$ pripada točka $p = (0,0)$, lahko red in tangente preberemo iz homogenega dela najnižje stopnje, ki je enak z^2. Red točke je torej 2, edina tangenta pa ima enačbo $z = 0$ (v afini ravnini $x = 1$ in tudi v projektivni ravnini).

Red točke $Q = [0,0,1]$ moramo določiti v afini ravnini $z = 1$. Enačba krivulje se tam glasi

$$y^4 - 2y^3 - 2xy^2 + y^2 - x^2 = 0,$$

točki Q pa pripada točka $q = (0,0)$. Homogen del najnižje stopnje je enak $y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$, torej je red točke enak 2, tangenti pa imata enačbi $y - x = 0$ in $y + x = 0$ (v afini ravnini $z = 1$ in tudi v projektivni ravnini).

c) Če označimo $T = [0,1,1]$, potem je $\frac{\partial F}{\partial x}(T) = -2$, $\frac{\partial F}{\partial y}(T) = 0$ in $\frac{\partial F}{\partial z}(T) = 0$. Torej je T gladka točka krivulje, enačba tangente pa je $-2x + 0y + 0z = 0$ oziroma $x = 0$. Parametrizacija tangente je $[x,y,z] = [0,y,z]$. Če to vstavimo v enačbo, dobimo $y^4 - 2y^3z + y^2z^2 = 0$ oziroma $y^2(y-z)^2 = 0$. Enačba $y = 0$ ustreza presečni točki $[0,0,1]$, enačba $y - z = 0$ pa ustreza presečni točki $[0,1,1]$. V obeh točkah je presečna večkratnost enaka 2.

d) Poračunajmo vse singularne točke. Odvode smo poračunali že v točki a). Torej imamo enačbe

$$\begin{aligned}
-2y^2z - 2xz^2 &= 0,\\
4y^3 - 6y^2z - 4xyz + 2yz^2 &= 0,\\
-2y^3 - 2xy^2 + 2y^2z - 2x^2z &= 0.
\end{aligned}$$

Prvo enačbo razstavimo $-2z(y^2 + xz) = 0$. Torej imamo dve možnosti

1) Če je $z = 0$, potem iz druge enačbe dobimo $y = 0$ in potem je tretja enačba avtomatično izpolnjena. Od tod dobimo singularno točko $[1, 0, 0]$.

2) Če je $y^2 + xz = 0$ (in $z \neq 0$), lahko izrazimo $x = -\frac{y^2}{z}$. Če to vstavimo v tretjo enačbo, dobimo $zy^2(z - y) = 0$. Ker je $z \neq 0$, imamo spet dve možnosti.

2.1) Če je $y = 0$, potem je $x = 0$ in druga enačba je potem avtomatično izpolnjena. Od tod dobimo singularno točko $[0, 0, 1]$.

2.2) Če je $z = y$ (in $y \neq 0$), potem je $x = -y$. Če to vstavimo v drugo enačbo, dobimo $y = 0$ in zato $x = z = 0$. Toda to ni točka v projektivnem.

Točko $[1, 0, 0]$ in $[0, 0, 1]$ sta torej edini singularni točki krivulje.