Algebraične krivulje
26. maj 2009

1. Naj bosta C_1 in C_2 dve kubiki, ki se sekata v 9 različnih točkah $P_1, \ldots, P_9$. Dokaži, da vsaka kubika, ki poteka skozi $P_1, \ldots, P_8$ poteka tudi skozi P_9.
   Uporabite dejstvo: Za točke $T_1, \ldots T_8$, od katerih nobene 4 ne ležijo na premici in nobenih 6 ne leži na kvadriki, velja $\dim S_3(T_1, \ldots T_8) = 2$.

2. Gladko kubično krivuljo $C : \{yz^2 - x(x-2y)(x+y) = 0\}$ opremimo s strukturo grupe z nevtralnim elementom $O = [0,0,1]$. Dokaži, da je O prevoj. Na C poišči vse točke (elemente grupe) reda 2!

3. Poišči vse tangente na krivuljo $C : \{z^5 - x^5 - y^5 + \frac{5}{4}x^4 y = 0\}$, ki potekajo skozi točko $Q = [1,0,0]$.
   Namig: izračunaj polaro $D_Q(C)$.

4. S projektivno zamenjavo koordinat prevedi kubiko

$$C : \{x^2 y + 2xy^2 + y^3 - z^3 + y^2 z = 0\}$$

   na Weierstrassovo obliko $yz^2 - x(x + \lambda_1 y)(x + \lambda_2 y)$.
   Namig: dokaži, da je $[1,0,0]$ prevojna točka za C. Weierstrassova kubika ima tangento $\{y = 0\}$ skozi prevojno točko $[0,0,1]$.