2. KOLOKVIJ – REŠITVE

1. [25] Poišči vse tangente na krivuljo $C:\ 3y^2 + z^2 + xy = 0$, ki potekajo skozi točko $Q = [0, 1, -1]$ in zapiši njihove enačbe.

Rešitev. Izračunajmo polaro na C glede na pol Q. Odvodi polinoma so enaki $\frac{\partial}{\partial x} = y$, $\frac{\partial}{\partial y} = 6y + x$ in $\frac{\partial}{\partial z} = 2z$. Enačba polare je torej $x + 6y - 2z = 0$. Sedaj poiščimo presečišča polare s krivuljo. Iz enačbe polare izrazimo $x = 2z - 6y$ in to vstavimo v enačbo krivulje, da dobimo

$$3y^2 + z^2 + (2z - 6y)y = z^2 + 2zy - 3y^2 = (z - y)(z + 3y) = 0.$$

Če je $z = y$, dobimo $x = -4y$, če pa je $z = -3y$, dobimo $x = -12y$. Presečišči sta torej $[-4, 1, 1]$ in $[-12, 1, -3]$. Enačbi tangent izračunamo po formuli in sta zaporedoma enaki $x + 2y + 2z = 0$ in $x - 6y - 6z = 0$.

2. [25] Poišči vse prevoje krivulje $C: \ -x^3 + 2z^3 + y^2 z = 0$.

Rešitev. Preverimo najprej, da krivulja nima singularnih točk. Velja

$$\frac{\partial}{\partial x} = -3x^2, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = 2zy, \qquad \frac{\partial}{\partial z} = 6z^2 + y^2.$$

Če so vsi trije odvodi enaki 0, potem je $x = 0$ ter $y = 0$ in $z = 0$. To ni točka v projektivnem, torej je krivulja gladka. Iz drugih odvodov dobimo Hessejevo determinanto

$$H = \begin{vmatrix} -6x & 0 & 0 \\ 0 & 2z & 2y \\ 0 & 2y & 12z \end{vmatrix} = -6x(24z^2 - 4y^2) = -24x(6z^2 - y^2).$$

Ker je krivulja gladka, so prevoji natanko točke v preseku C in Hessejeve krivulje $H = 0$. Imamo dve možnosti:

Če je $x = 0$, potem iz enačbe krivulje dobimo $2z^3 + zy^2 = z(2z^2 + y^2) = 0$. Če je $z = 0$, dobimo prevoj $[0, 1, 0]$. Sicer pa je $y^2 = -2z^2$, torej $y = \pm\sqrt{2}iz$, od koder dobimo prevoja $[0, \sqrt{2}i, 1]$ in $[0, -\sqrt{2}i, 1]$.

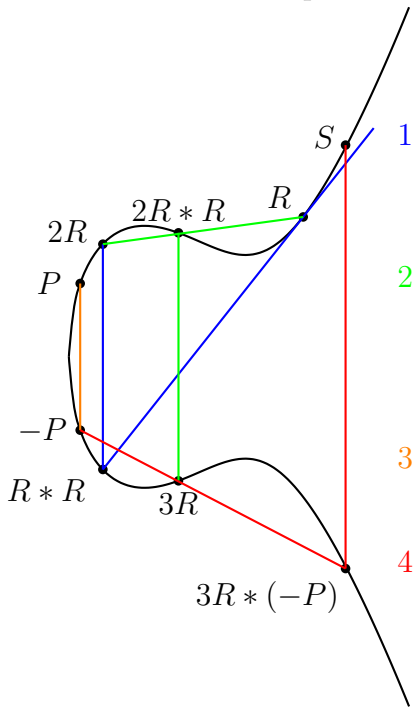
Če je $y^2 = 6z^2$, potem je $y = \pm\sqrt{6}z$. V obeh primerih iz enačbe krivulje dobimo $-x^3 + 2z^3 + 6z^3 = 0$ oziroma $x^3 = 8z^3$. Rešitve te enačbe so $x = 2z, 2\omega z, 2\omega^2 z$, kjer je $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Od tod dobimo še 6 prevojev

$$[2, \sqrt{6}, 1], [2\omega, \sqrt{6}, 1], [2\omega^2, \sqrt{6}, 1], [2, -\sqrt{6}, 1], [2\omega, -\sqrt{6}, 1], [2\omega^2, -\sqrt{6}, 1].$$

3. [25] Dani sta točki P in R na Weierstrassovi kubiki, ki je opremljena s standardno strukturo grupe (glej skico). Skonstruiraj točko S na tej kubiki, za katero velja

$$3R - S = P.$$

Vse korake natančno opiši.



Rešitev. Najprej iz enačbe izrazimo $S = 3R + (-P)$.

1. korak: skonstruiramo $2R = R + R$ (tangenta skozi R seka kubiko v $R * R$, navpičnica skozi $R * R$ seka kubiko v $2R$)

2. korak: skonstruiramo $3R = 2R + R$ (premca skozi $2R$ in R seka kubiko v $2R * R$, navpičnica skozi $2R * R$ seka kubiko v $3R$)

3. korak: skonstruiramo $-P$ (navpičnica skozi P seka kubiko v $-P$)

4. korak: skonstruiramo $S = 3R + (-P)$ (premica skozi $3R$ in $-P$ seka kubiko v $3R * (-P)$, navpičnica skozi $3R * (-P)$ seka kubiko v S)

4. [25] Dani sta stožnici

$$C:\ x^2+z^2+2xy-6xz-2yz=0 \qquad \text{in} \qquad D:\ 2x^2-3y^2+2z^2-2xy+2yz=0.$$

Poišči razcepne stožnice v šopu $\lambda C+\mu D$ in njihov razcep.

Rešitev. Matriki stožnic C in D sta enaki

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matrika splošne stožnice v šopu je torej enaka

$$M=\begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda-\mu & -3\lambda \\ \lambda-\mu & -3\mu & -\lambda+\mu \\ -3\lambda & -\lambda+\mu & \lambda+2\mu \end{bmatrix}.$$

Stožnica bo razcepna, ko bo $\det M=0$. Velja

$$\begin{aligned}
\det M &= \begin{vmatrix} \lambda+2\mu & \lambda-\mu & -3\lambda \\ \lambda-\mu & -3\mu & -\lambda+\mu \\ -3\lambda & -\lambda+\mu & \lambda+2\mu \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} \lambda+2\mu & \lambda-\mu & -3\lambda \\ \lambda-\mu & -3\mu & -\lambda+\mu \\ -2\lambda+2\mu & 0 & -2\lambda+2\mu \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \\
&\overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 4\lambda+2\mu & \lambda-\mu & -3\lambda \\ 2\lambda-2\mu & -3\mu & -\lambda+\mu \\ 0 & 0 & -2\lambda+2\mu \end{vmatrix} = 2(\mu-\lambda)(-3\mu(4\lambda+2\mu)-2(\lambda-\mu)^2) = \\
&= 2(\mu-\lambda)(-12\mu\lambda-6\mu^2-2\lambda^2+4\lambda\mu-2\mu^2) = \\
&= 2(\mu-\lambda)(-2\lambda^2-8\lambda\mu-8\mu^2) = \\
&= -4(\mu-\lambda)(\lambda+2\mu)^2.
\end{aligned}$$

Pri $\lambda=\mu$ dobimo stožnico

$$\begin{aligned}
F:\ 3x^2-3y^2+3z^2-6xz &= 3(x^2-2xz+z^2-y^2) = 3((x-z)^2-y^2) = \\
&= 3(x-z-y)(x-z+y) = 0,
\end{aligned}$$

pri $\lambda=-2\mu$ pa stožnico

$$\begin{aligned}
G:\ -3y^2-6xy+6yz+12xz &= -3(y^2+2xy-2yz-4xz) = \\
&= -3(y(y+2x)-2z(y+2x)) = \\
&= -3(y+2x)(y-2z) = 0.
\end{aligned}$$