

Algebraične krivulje

(23.4.2010)

1. Dana je krivulja $C : yz^2 - x^3 + 3xy^2 = 0$.
 - (a) Pokaži, da je C gladka krivulja.
 - (b) Izračunaj polaro za C glede na pol $q = [a, b, c]$.
 - (c) Poišči vse tangente na C , ki vsebujejo točko $[0, 0, 1]$.
2. Poišči vse tangente na krivuljo $x^2 - yz = 0$, ki vsebujejo točko $[1, -1, 1]$.
3. Poišči vse tangente na krivuljo $x^2 - y^2 + z^2 = 0$, ki vsebujejo točko $[1, 0, 1]$.
4. Poišči vse premice, ki sekajo krivuljo $x^3 + y^3 - 3xz^2 = 0$ v največ dveh različnih točkah in potekajo skozi točko
 - (a) $q = [1, 0, 0]$,
 - (b) $q = [0, 1, 0]$,
 - (c) $q = [1, 0, 1]$.
5. Naj bo C krožnica. Izpelji geometrijsko konstrukcijo za polaro $D_q C$, če:
 - (a) q leži zunaj krožnice,
 - (b) q leži na krožnici,
 - (c) q leži znotraj krožnice, a ni središče krožnice,
 - (d) q je središče krožnice.

Nasvet: Pokaži, da za stožnico C in poljubni točki p in q velja: $p \in D_q C \Leftrightarrow q \in D_p C$.
6. Naj bo \mathcal{K} krožnica, T točka zunaj nje in p premica skozi T , ki seka krožnico \mathcal{K} v točkah A in B . Naj bosta P in Q dotikališči tangent na \mathcal{K} , ki potekata skozi T , in naj bo R presečišče tangent na \mathcal{K} v točkah A in B . Pokaži, da so točke P , Q in R kolinearne.

Nasvet: Pomagaj si z nalogo 5.
7. *Weierstrassova kubika* ima enačbo $yz^2 - x(x + \lambda y)(x + \mu y) = 0$.
 - (a) Nariši jo v afini ravnini $y = 1$.
 - (b) Poišči singularne točke.
 - (c) Poišči en prevoj in izračunaj prevojno tangento ter njeno presečno večkratnost.
8. Izračunaj vse prevoje in prevojne tangente krivulje $x^3 - zy^2 = 0$.
9. Izračunaj prevojne točke krivulje $x^3 + y^3 - xyz = 0$.