Algebraične krivulje

(19.3.2010)

1. Dokaži naslednji trditvi.

   (a) Polinom $p \in \mathbb{C}[x]$ ima dvojno ničlo natanko takrat, kadar je $\Delta_p = 0$.

   (b) Polinom $p \in \mathbb{C}[x, y]$ je brez kvadratov (je minimalen za krivuljo, ki jo določa) natanko tedaj, kadar sta polinoma Δ_p^x in Δ_p^y neničelna. Pri tem sta Δ_p^x oziroma Δ_p^y diskriminanti polinoma p glede na spremenljivko x oziroma y.

2. Dana je afine algebraična krivulja $\mathcal{C} : (x^2+y^2)^2+3x^2y-y^3 = 0$ (triperesna deteljica) in neka premica p, ki gre skozi točko $(0, 0)$. Izračunaj presečno večkratnost p in $\mathcal{C}$ v točki $(0, 0)$.

3. Dana je projektivna algebraična krivulja $\mathcal{C} : x^3 - yz^2 = 0$ in neka premica p, ki gre skozi točko $[0, 1, 0]$. Izračunaj presečne večkratnosti p in $\mathcal{C}$.

4. Dana je afina algebraična krivulja $\mathcal{C} : x^4 - y^4 = 1$ in neka premica, ki gre skozi točko $(1, 0)$. Izračunaj presečno večkratnost p in $\mathcal{C}$ v neskončnosti.

5. Izračunaj presečno večkratnost krivulje

   $$x^{10} - 3x^4y^3 + 2y^6 - 51xy^2 + 36x^2 + 74y - 85 = 0$$

   in premice

   $$y - x - 1 = 0$$

   v točki $(0, 1)$ in v točki $(1, 2)$.

6. Pokaži, da naslednji krivulji nista algebraični krivulji:

   (a) *cikloida* (to je krivulja, ki jo opiše točka na obodu kroga s polmerom 1, ko se ta kotali po x osi),

   (b) graf funkcije $f(x) = \frac{1+\sin(10\pi x)}{2}e^x + \frac{1-\sin(10\pi x)}{2}e^{\frac{x}{2}}$.