

# Algebraične krivulje

(12.3.2010)

1. Pokaži, da je *hipocikloida* algebraična krivulja. *Hipocikloida* je krivulja, ki jo opiše točka na obodu kroga s polmerom  $\frac{1}{3}$ , ko se ta kotali po notranji strani kroga s polmerom 1.
2. Dana je algebraična krivulja  $\mathcal{C} : 4xy - z^2 = 0$  in projektivnost

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zapiši enačbo algebraične krivulje  $\theta(\mathcal{C})$ .

3. Poišči vse projektivnosti, ki točke  $[0, 0, 1]$ ,  $[1, -2, 0]$ ,  $[0, 1, 0]$  preslikajo zaporedoma v točke  $[1, 0, 0]$ ,  $[0, 1, 0]$ ,  $[0, 0, 1]$ , krivuljo  $(3x + z)^2 + 3yz = 0$  pa preslikajo v krivuljo  $x^2 + xz + y^2 = 0$ .
4. Poišči stožnico v projektivni ravnini, ki gre skozi točke  $[1, 1, 3]$ ,  $[0, 1, 0]$ ,  $[-3, 1, 7]$ ,  $[-1, 3, 5]$  in  $[1, 2, -1]$ .
5. Poišči stožnico v projektivni ravnini, ki gre skozi točke  $[1, 1, 0]$ ,  $[0, 1, -2]$ ,  $[-5, 1, 3]$ ,  $[0, 3, -1]$  in  $[1, 0, 0]$ .
6. Dani sta afini algebraični krivulji

$$\mathcal{C}_1 : x^3 - x^2y - 5y^2 - 2xy - x = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{C}_2 : x^2 - xy + x + y = 0.$$

Izračunaj presek pripadajočih projektivnih krivulj.

7. Izračunaj rezultanto polinomov  $p(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - 2xz$  in  $q(x, y, z) = x^3 - y^3 - 2x^2z - xy^2 + xz^2$  glede na  $x$ .
8. Izračunaj rezultanto polinomov  $p(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - 2xz$  in  $q(x, y, z) = x^3 - y^3 - 2x^2z - xy^2 + xz^2$  glede na  $z$ .
9. *Diskriminanto* polinoma  $p \in K[x]$  (stopnje vsaj 2) definiramo kot  $\Delta_p = R_{p,p'}$ , kjer je  $p'$  odvod polinoma  $p$ . Dokaži naslednji trditvi.
  - (a) Polinom  $p \in \mathbb{C}[x]$  ima dvojno ničlo natanko takrat, kadar je  $\Delta_p = 0$ .
  - (b) Polinom  $p \in \mathbb{C}[x, y]$  je brez kvadratov natanko tedaj, kadar sta polinoma  $\Delta_p^x$  in  $\Delta_p^y$  neničelna. Pri tem sta  $\Delta_p^x$  oziroma  $\Delta_p^y$  diskriminanti polinoma  $p$  glede na spremenljivko  $x$  oziroma  $y$ .