Analiza 1:
Pisni izpit

15. 6. 2012

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk.

Veliko uspeha!

Naloga 1

Določi konstanti $a, b \in \mathbb{R}$ tako, da bo funkcija, podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x) - ax \cdot \cos\sqrt{x}}{x^3} & ; \quad x \neq 0 \\ b & ; \quad x = 0 \end{cases},$$

zvezna povsod, kjer je definirana in ugotovi, ali je $f : D_f \to \mathbb{R}$ surjektivna.

Naloga 2

a) Določi konvergenčni polmer potenčne vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)},$$

kjer je $a > 0$. Za $a \geq 1$ razišči tudi konvergenco v krajiščih območja konvergence!

b) Ali konvergira vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}?$$

Naloga 3

Izračunaj nedoločena integrala:

$$a) \int \frac{\sin^2 x}{4 + \cos^2 x} dx \qquad b) \int (x + e^x)^2 dx$$

Naloga 4

Naj bosta $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taki funkciji, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $0 \leq f(x) \leq g(x)$ in funkcijsko zaporedje f_n podano s predpisom

$$f_n(x) = \sqrt[n]{(f(x))^n + (g(x))^n}.$$

a) Dokaži, da zaporedje f_n konvergira po točkah na $\mathbb{R}$.

b) Poišči taki funkciji f in g, da zaporedje f_n ne bo konvergiralo enakomerno na $\mathbb{R}$.