4. izpit iz Analize 1

17. 9. 2012

Čas pisanja je 100 minut. Možno je doseči 100 točk.
Veliko uspeha!

1. naloga

Zaporedje je podano z začetnim členom $a_1 = 1$ in rekurzivno zvezo

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 2}.$$

Dokaži, da je zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno in izračunaj limito.

2. naloga

Naj bodo

$$f(x) = \frac{2\ln 2 + \ln x}{\sqrt{x}},$$

a ničla funkcije f in b točka, kjer f zavzame maksimum. Izračunaj prostornino vrtenine, ki nastane, če del grafa funkcije f nad intervalom $[a, b]$ zavrtimo okoli abscisne osi.

3. naloga

Razvij funkcijo

$$f(x) = \frac{12 - 5x}{6 - 5x - x^2}$$

v Taylorjevo vrsto okrog točke $a = 2$ in določi $f^{(2012)}(2)$.

4. naloga

Naj bo $\mathcal{A}$ taka družina nenegativnih zveznih funkcij na intervalu $[0, 1]$, da velja:

a) Za poljubni funkciji $f, g \in \mathcal{A}$ obstaja funkcija $h \in \mathcal{A}$, da je

$$h(x) \leq \min(f(x), g(x))$$

za vsak $x \in [0, 1]$.

b) Za vsak $x \in [0, 1]$ je $\inf\{f(x) \mid f \in \mathcal{A}\} = 0$.

Dokaži, da za vsako pozitivno število $\varepsilon > 0$ obstaja taka funkcija $f \in \mathcal{A}$, da za vsak $x \in [0, 1]$ velja $f(x) < \varepsilon$.