1. kolokvij iz Analize 1

12. 12. 2012

Vse odgovore utemelji!

1. naloga

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna $\boxed{\text{P}}$ oziroma napačna $\boxed{\text{N}}$.
Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- [ ] Če zaporedje ni konvergentno, je neomejeno.
- [ ] Zaporedje je konvergentno natanko tedaj, ko zadošča Cauchyjevemu pogoju.
- [ ] Množici $\mathbb{R}$ in $[0,1]$ sta ekvipolentni.
- [ ] Če kompleksno število z ustreza enačbi $z^7 + 3z^3 = 1$, tej enačbi ustreza tudi njegova konjugirana vrednost $\overline{z}$
- [ ] Preslikava $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, podana s predpisom $f(x) = e^{2x+1}$, je surjektivna.
- [ ] Če konvergentnemu zaporedju spremenimo prvih 2012 členov, se lahko spremeni njegova limita.
- [ ] Če sta $f\colon A \to B$ in $g\colon B \to C$ injektivni, je tudi $g \circ f\colon A \to C$ injektivna.
- [ ] Število a je limita zaporedja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ velja $|a_k - a| \geq \varepsilon$ le za končno mnogo $k \in \mathbb{N}$.
- [ ] Če je zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ naraščajoče in omejeno, je konvergentno.
- [ ] Če je B omejena množica in $A \subsetneq B$ neprazna podmnožica, velja $\sup A < \sup B$.

2. naloga

Določi vsa realna števila, ki zadoščajo neenačbi

$$||x+3|-1| < \frac{x+4}{x+1}.$$

3. naloga

Dano je zaporedje s splošnim členom

$$a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \operatorname{tg} \frac{2n\pi}{3} + n^{1-(-1)^n}.$$

a) Ali je zaporedje omejeno?
b) Določi vsa njegova stekališča.

4. naloga

Za realno število x definiramo kompleksno število $f(x) = \frac{x+i}{x-i}$.
a) Dokaži, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $|f(x)| = 1$.
b) Ali je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ injektivna?
c) Ali je funkcija $f : \mathbb{R} \to \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| = 1\}$ surjektivna?

5. naloga

Dokaži, da za vsako naravno število n velja

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Namig: Uporabiš lahko enakost

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$