Rešitve 1. kolokvija iz ANALIZE I

1. a) Reši neenačbo

$$\sqrt{2x-1} < \frac{x+1}{3-x}.$$

b) Naj bo R množica rešitev neenačbe iz točke a). Določi supremum, infimum, maksimum in minimum množice R, če obstajajo.

Rešitev:

a) Zaradi dobre definiranosti korena na levi strani in ulomka na desni strani neenačbe, moramo privzeti $x \geq \frac{1}{2}$ in $x \neq 3$. Tedaj je $x+1 > 0$, zato je v primeru $3-x < 0$ desna stran neenčbe negativna, leva pa je nenegativna, torej noben $x > 3$ ne reši dane neenačbe. V preostalem primeru je $x < 3$ in lahko neenačbo pomnožimo s pozitivnim številom $3-x$ ter dobimo $(3-x)\sqrt{2x-1} < x+1$. Ker sta obe strani zadnje neenčbe nenegativni, jo lahko kvadriramo in preuredimo v

$$p(x) = x^3 - 7x^2 + 11x - 5 < 0.$$

Ni se težko prepričati, da je $x = 1$ ničla polinoma p, s pomočjo Hornerjevega algoritma, pa dobimo

$$p(x) = (x-1)(x^2 - 6x + 5) = (x-1)^2(x-5) < 0.$$

Ker je za $x \neq 1$ izraz $(x-1)^2$ pozitiven, dobimo pogoj $x - 5 < 0$, kar pomeni $x < 5$. Če upoštevamo se pogoje $x < 3$, $x \geq \frac{1}{2}$, dobimo množico rešitev

$$R = [\frac{1}{2}, 3) \setminus \{1\}.$$

b) Dobimo $\min R = \inf R = \frac{1}{2}$, $\sup R = 3$, $\max R$ pa ne obstaja.

2. Dan je izraz

$$f(z) = \frac{(1+i)(z-2-i)}{z-1}.$$

a) Naj bo $z \neq 1$ kompleksno število, za katero velja

$$|z-i-1| = 1.$$

Dokaži, da je $f(z)$ čisto imaginarno kompleksno število.

b) Določi množico

$$A = \{z \mid f(z^3) = 2i\}.$$

Rešitev:

a) Naj bo $w = z - i - 1$. Tedaj je $z = 1 + i + w$, kjer je $|w| = 1$ in $f(z) = \frac{(1+i)(w-1)}{w+i}$. Ulomek razširimo s konjugirano vrednostjo imenovalca, ki je enaka $\overline{w} - i$ in dobimo

$$f(z) = \frac{(1+i)(w-1)(\overline{w}-i)}{|w+i|^2} = \frac{(1+i)(w\overline{w} - iw - \overline{w} + i)}{|w+i|^2}.$$

Ker je $w\overline{w} = |w|^2 = 1$, dobimo

$$f(z) = \frac{(1+i)(1+i-iw-\overline{w})}{|w+i|^2} = \frac{2i - iw - i\overline{w} + w - \overline{w}}{|w+i|^2}.$$

Če upoštevamo še, da je $w + \overline{w} = 2\mathrm{Re}(w)$ in $w - \overline{w} = 2i\mathrm{Im}(w)$, velja

$$f(z) = \frac{2i(1 - \mathrm{Re}(w) + \mathrm{Im}(w))}{|w+i|^2},$$

torej je $f(z)$ res imaginarno število.

b) Iz enačbe $f(z^3) = \frac{(1+i)(z^3-2-i)}{z^3-1} = 2i$ izračunamo

$$z^3 = \frac{1+i}{1-i} = i,$$

torej je $z = \sqrt[3]{i}$. Število i zapišemo v polarnem zapisu $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, od koder dobimo

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right),$$

kjer je $k = 0, 1, 2$. Množica A je tako enaka

$$A = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2},\ -i\right\}.$$

3. Zaporedje ustreza rekurzivni zvezi $a_{n+1} = \frac{2a_n - 1}{a_n}$.
a) Dokaži, da zaporedje konvergira in in določi limito, če je začetni člen enak $a_1 = 2$.
b) Ali zaporedje konvergira, če je začetni člen enak $a_1 = -1$?

Rešitev:

Graf funkcije $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$, ki določa dano rekurzivno formulo ($a_{n+1} = f(a_n)$), je hiperbola s polom pri $x = 0$ in vodoravno asimptoto $y = 2$. Presečišča grafa $y = f(x)$ in premice $y = x$ dobimo iz enačbe $x = 2 - \frac{1}{x}$, ki ima eno samo rešitev $x = 1$. Iz grafičnega prikaza, se hitro vidi, da je pri začetnem členu $a_1 > 1$ zaporedje padajoče in navzdol omejeno z 1.

1. Z indukcijo dokažimo, da velja $a_n < 1$.

'$n = 1$': Po predpostavki je $a_1 > 1$.

'$n \Rightarrow n+1$': Denimo, da je $a_n > 1$. Tedaj je $\frac{1}{a_n} < 1$, zato je $a_{n+1} = 2-\frac{1}{a_n} > 2-1 = 1$. S tem je indukcijski korak končan.

2. Z indukcijo dokažimo, da zaporedje pada, tj. $a_{n+1} < a_n$. (le za primer $a_1 = 2$)

'$n = 1$': Velja $a_2 = f(a_1) = f(2) = \frac{3}{2} < 2 = a_1$.

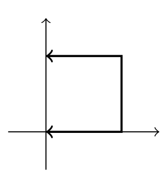
'$n \Rightarrow n+1$': Denimo, da je $a_{n+1} < a_n$. Ker na intervalu $(0, \infty)$ funkcija f narašča in so členi zaporedja večji od 1, dobimo $a_{n+2} = f(a_{n+1}) < f(a_n) = a_{n+1}$, kar je bilo potrebno dokazati.

3. Iz točk 1. in 2. sledi, da obstaja limita $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Če v rekurzivni formuli posljemo "$n \to \infty$", dobimo enačbo $a = f(a)$, ki ima edino rešitev $a = 1$

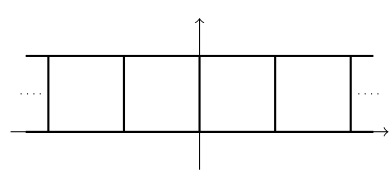
b) Če je začetni člen $a_1 = -1$, je naslednji člen $a_2 = f(a_1) = f(-1) = 3$, zato je za $n \geq 2$ zaporedje kot v točki a) padajoče z limito $a = 1$.

4. a) Dokaži, da sta množici $K = (0,1) \times \{0,1\} \cup \{1\} \times [0,1]$ (glej sliko 1) in $(0,1]$ ekvipolentni.

   b) Dokaži, da sta množici $L = \mathbb{R} \times \{0,1\} \cup \mathbb{Z} \times [0,1]$ (glej sliko 2) in $\mathbb{R}$ ekvipolentni.



slika 1



slika 2

Rešitev:

a) Zapišimo najprej bijektivno preslikavo $f : K \to (0,1)$. Gornji del množice K preslikamo na interval $(0, \frac{1}{3})$, tj. za $x \in (0,1)$ definiramo $f(x,1) = \frac{x}{3}$, 'pokončni del' množice K preslikamo na interval $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, tj. za $y \in [0,1]$ definiramo $f(1,y) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}y$ nazadnje pa preslikamo še spodnji del množice K na interval $(\frac{2}{3}, 1)$, tj. za $x \in (0,1)$ definiramo $f(x,0) = \frac{2}{3} + \frac{x}{3}$. Če dobljeno bijektivno preslikavo f komponiramo z bijektivno preslikavo $f_0 : (0,1) \to [0,1)$, ki smo jo konstruirali na vajah, dobimo bijektivno preslikavo $f_0 \circ f : K \to [0,1)$. Ker je preslikava s predpisom $g(x) = 1 - x$ bijekcija med intervaloma $[0,1)$ in $(0,1]$, je množica K res ekvipolentna intervalu $(0,1]$.

b) Množico L lahko razbijemo na disjunktne podmnožice $K_m = K + (m,0)$, kjer m teče po vseh celih številih. Ker je vsaka množica K_m ekvipolentna K, ki je po točki a) ekvipolentna intervalu $(m, m+1]$, lahko tvorimo bijektivne preslikave $f_m : K_m \to (m, m+1]$. Če te preslikave združimo, dobimo bijektivno preslikavo iz unije množic K_m, ki je enaka ravno množici L, na unijo intervalov $(m, m+1]$, ki skupaj tvorijo ravno množico $\mathbb{R}$. S tem smo dokazali, da sta množici L in $\mathbb{R}$ res ekvipolentni.