Rešitve 1. kolokvija iz ANALIZE I z dne 27. 11. 2013

1. Določi vsa realna števila, ki zadoščajo neenačbi

$$\frac{|x-3|}{x+1} > \sqrt{3-2x}.$$

Rešitev:

Zaradi dobre definiranosti korena na desni strani in ulomka na levi strani neenačbe, moramo privzeti $x \le \frac{3}{2}$ in $x \ne -1$.

1. Če je $x < -1$, velja $3 - x > 3 + 1$ in torej $|3 - x| = 4 > 0$ ter $x + 1 < 0$. Leva stran neenačbe je tako negativna, desna pa večja ali enaka 0, zato neenačba v tem primeru ne velja.

2. Naj bo $x \in (-1, \frac{3}{2}]$. Tedaj velja $3-x \ge 3-\frac{3}{2} > 0$, torej je $|3-x| = 3-x$ in $x + 1 > 0$ zato lahko neenačbo pomnožimo z $x + 1$ in dobimo

$$3 - x > (x + 1)\sqrt{3 - 2x}.$$

Ker sta obe strani zadnje neenačbe nenegativni, jo lahko kvadriramo in dobimo neenačbo

$$x^2 - 6x + 9 > (x^2 + 2x + 1)(3 - 2x),$$

ki jo preuredimo v neenačbo

$$2x^3 + 2x^2 - 10x + 6 > 0.$$

Označimo $p(x) = 2x^3+2x^2-10x+6$. Možne celoštevilske ničle polinoma p so tedaj $\pm1, \pm2, \pm3$ in ±6. S pomočjo Hornerjevega algoritma ugotovimo, da je 1 ničla polinoma p in velja $p(x) = (x - 1)(x^2 + 2x - 3) = (x - 1)(x - 1)(x + 3)$. Ker je vodilni koeficient polinoma p pozitivno število 2, je vrednost $p(x)$ pozitivna natanko tedaj, ko je $x \in (-3, 1) \cup (1, \infty)$. Če zadnjo ugotovitev zrdužimo s pogojem $x \in (-1, \frac{3}{2}]$, dobimo končno rešitev

$$x \in (-1, 1) \cup (1, \frac{3}{2}].$$

2. Dan je izraz

$$f(z) = \frac{(1+i)(z-2-i)}{z-1}.$$

a) Naj bo $z \neq 1$ kompleksno število, za katero velja

$$|z-i-1| = 1.$$

Dokaži, da je $f(z)$ čisto imaginarno kompleksno število.

b) Določi množico

$$A = \{z \mid f(z^3) = 2i\}.$$

REŠITEV:

a) Naj bo $w = z - i - 1$. Tedaj je $z = 1 + i + w$, kjer je $|w| = 1$ in $f(z) = \frac{(1+i)(w-1)}{w+i}$. Ulomek razširimo s konjugirano vrednostjo imenovalca, ki je enaka $\overline{w} - i$ in dobimo

$$f(z) = \frac{(1+i)(w-1)(\overline{w}-i)}{|w+i|^2} = \frac{(1+i)(w\overline{w} - iw - \overline{w} + i)}{|w+i|^2}.$$

Ker je $w\overline{w} = |w|^2 = 1$, dobimo

$$f(z) = \frac{(1+i)(1+i-iw-\overline{w})}{|w+i|^2} = \frac{2i - iw - i\overline{w} + w - \overline{w}}{|w+i|^2}.$$

Če upoštevamo še, da je $w + \overline{w} = 2\mathrm{Re}(w)$ in $w - \overline{w} = 2i\mathrm{Im}(w)$, velja

$$f(z) = \frac{2i(1 - \mathrm{Re}(w) + \mathrm{Im}(w)}{|w+i|^2},$$

torej je $f(z)$ res imaginarno število.

b) Iz enačbe $f(z^3) = \frac{(1+i)(z^3-2-i)}{z^3-1} = 2i$ izračunamo

$$z^3 = \frac{1+i}{1-i} = i,$$

torej je $z = \sqrt[3]{i}$. Število i zapišemo v polarnem zapisu $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, od koder dobimo

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right),$$

kjer je $k = 0, 1, 2$. Množica A je tako enaka

$$A = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2},\ -i\right\}.$$

3. Zaporedje ustreza rekurzivni zvezi $a_{n+1} = \frac{2a_n - 1}{a_n}$.
Dokaži, da zaporedje konvergira in in določi limito, če je začetni člen enak $a_1 = 2$.

REŠITEV:

Graf funkcije $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$, ki določa dano rekurzivno formulo ($a_{n+1} = f(a_n)$), je hiperbola s polom pri $x = 0$ in vodoravno asimptoto $y = 2$. Presečišča grafa $y = f(x)$ in premice $y = x$ dobimo iz enačbe $x = 2 - \frac{1}{x}$, ki ima eno samo rešitev $x = 1$. Iz grafičnega prikaza, se hitro vidi, da je pri začetnem členu $a_1 > 1$ zaporedje padajoče in navzdol omejeno z 1.

1. Z indukcijo dokažimo, da velja $a_n > 1$.

'$n = 1$': Po predpostavki je $a_1 > 1$.

'$n \Rightarrow n+1$': Denimo, da je $a_n > 1$. Tedaj je $\frac{1}{a_n} < 1$, zato je $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} > 2 - 1 = 1$. S tem je indukcijski korak končan.

2. Z indukcijo dokažimo, da zaporedje pada, tj. $a_{n+1} < a_n$.

'$n = 1$': Velja $a_2 = f(a_1) = f(2) = \frac{3}{2} < 2 = a_1$.

'$n \Rightarrow n+1$': Denimo, da je $a_{n+1} < a_n$. Ker na intervalu $(0, \infty)$ funkcija f narašča in so členi zaporedja večji od 1, dobimo $a_{n+2} = f(a_{n+1}) < f(a_n) = a_{n+1}$, kar je bilo potrebno dokazati.

3. Iz točk 1. in 2. sledi, da obstaja limita $a = \lim_{n \to \infty} a_n$. Če v rekurzivni formuli pošljemo "$n \to \infty$", dobimo enačbo $a = f(a)$, ki ima edino rešitev $a = 1$

4. Dana je množica

$$N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < 2,\ 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y < 2,\ x = 2y\}.$$

a) Konstruiraj bijektivno preslikavo $f : N \to [0,1) \times [0,1]$.

b) Dokaži, da imata množici N in $[-1,1] \times (-1,1)$ enako moč.

REŠITEV:

a) Množica N je unija 'pravokotnika' $P = [0,2) \times [0,1]$ in 'polodprte' daljice $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y < 2,\ x = 2y\}$. S preslikavo $f(x,y) = (\frac{x}{2}, y)$ se pravokotnik bijektivno preslika na 'kvadrat' $K = [0,1) \times [0,1]$, daljica D pa v daljico $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y < 2,\ x = y\}$. Definirajmo še bijektivno preslikavo g množice $K \cup S$ na željeni kvadrat $Q = [0,1) \times [0,1]$, ki je unija diagonale $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x < 1,\ x = y\}$ in preostanka $Q \setminus L$. Točke $(x,y) \in K \setminus S = Q \setminus L$ 'pustimo pri miru', kar pomeni, da predpišemo $g(x,y) = (x,y)$, daljico S pa bijektivno preslikamo na daljico L tako, da za točke $(x,y) \in S$ predpišemo $g(x,y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$. Iskana bijektivna preslikava je tedaj kompozitum $F = g \circ f : N \to [0,1) \times [0,1]$.

b) Ker vemo, da sta poljubna intervala neničelne dolžine ekvipolentna, obstajata bijekciji $f_1 : [0,1) \to [-1,1]$ in $f_2 : [0,1] \to (-1,1)$. Zato lahko definiramo bijektivno preslikavo $G : [0,1) \times [0,1] \to [-1,1] \times (-1,1)$ s predpisom $G(x,y) = (f_1(x), f_2(y))$. Kompozitum preslikav F in G je tedaj bijekcija $G \circ F : N \to [-1,1] \times (-1,1)$, kar pomeni, da imata množici N in $[-1,1] \times (-1,1)$ enako moč.