

2. kolokvij iz ANALIZE I

22. 1. 2009

1. Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je dana s predpisom $f(x) = x + [x]$, kjer $[x]$ označuje celi del števila x .
 - a) Dokaži, da je f injektivna funkcija.
 - b) Določi zalogo vrednosti Z_f funkcije f .
 - c) Skiciraj graf inverzne funkcije $f^{-1} : Z_f \rightarrow \mathbb{R}$.
2. Naj bo $p > 0$ in $F(p, 0)$ gorišče parabole z enačbo $y^2 = 4px$. Na dani paraboli izberimo poljubno točko T . Dokaži, da je kot med zveznico FT in normalo n na parabolo v točki T enak kotu, ki ga normala n oklepa z abscisno osjo.

3. Izračunaj limiti:

a)
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{\sin(2\pi x)}$$

b)
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \operatorname{ctg} x)^{\tan x}$$

4. Naj bo $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Dokaži, da obstaja tako število $a \in [0, 1)$, da je

$$(1 - a)(f(a))^2 = a.$$