| | |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| $\Sigma$ | |

**Analiza I: 2. kolokvij**

8. 1. 2014

Ime in priimek

Vpisna številka

## 1. naloga

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna $\boxed{\text{P}}$ oziroma napačna $\boxed{\text{N}}$.

Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- $\boxed{\text{P}}$ Če je vrsta absolutno konvergenta, je tudi konvergentna.
- $\boxed{\text{P}}$ Če za zvezni funkciji $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ velja $f(x) = g(x)$ za vse $x \in \mathbb{Q}$, je $f = g$.
- $\boxed{\text{N}}$ Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ je konvergentna.
- $\boxed{\text{N}}$ Naj bo $a_n > 0$ in $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Tedaj je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna.
- $\boxed{\text{P}}$ Hiperbolični kosinus ch je zvezna funkcija na celi realni osi.
- $\boxed{\text{N}}$ Vrsta s pozitivnimi členi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentna, če velja $\sqrt[n]{a_n} < 1$ za vse $n \in \mathbb{N}$.
- $\boxed{\text{P}}$ Obstaja $x \in (0, \frac{1}{2})$, da je $\ln \frac{1+x}{1-x} = 1$.
- $\boxed{\text{N}}$ Če je $a_n > 0$ in je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna, je tudi $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ konvergentna.
- $\boxed{\text{N}}$ Funkcija $f$ je zvezna v točki $a$ natanko tedaj, ko je $\lim_{x\uparrow a} f(x) = \lim_{x\downarrow a} f(x)$.
- $\boxed{\text{N}}$ Funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je zvezna v $a$, če za vsak $\varepsilon > 0$ in vsak $\delta > 0$ velja $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, čim je $|x - a| < \delta$.

**2. naloga**

a) Naj bo $k$ naravno število. Ugotovi za katera realna števila $x \in [-1,1]$ absolutno konvergira vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n)}.$$

b) Ali konvergira vrsta

$$\sum_{n=2014}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{2}{n^2}?$$

a) $D = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,|x|^{n+1}}{(k+1)\cdot\ldots\cdot(k+n+1)} \cdot \frac{(k+1)\cdot\ldots\cdot(k+n)}{n!\,|x|^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)|x|}{n+k+1} = |x|$

$\Rightarrow$ Če je $|x|<1$, vrsta absolutno konvergira.

Naj bo $|x|=1$.

$R = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{n+k+1}{(n+1)} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n \frac{n+k+1-n-1}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{k\cdot n}{n+1} = k$

$\Rightarrow$ Če je $|x|=1$ in $k>1$, vrsta konvergira absolutno.

Naj bo $|x|=1$ in $k=1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2\cdot\ldots\cdot(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ ne konvergira

<u>Rešitev</u>: Vrsta ne konvergira absolutno le, ko je $|x|=1$ in $k=1$.

b) Za $n \geq 2$ velja

$\operatorname{tg}\frac{2}{n^2} = \frac{\sin\frac{2}{n^2}}{\cos\frac{2}{n^2}} \leq \frac{\sin\frac{2}{n^2}}{\cos\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\cos\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{n^2}$

Ker je $\operatorname{tg}\frac{2}{n^2} > 0$ za $n \geq 2$ in vrsta $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\cos\frac{1}{2}} \frac{2}{n^2}$ konvergira, vrsta $\sum\limits_{n=2014}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{2}{n^2}$ konvergira.

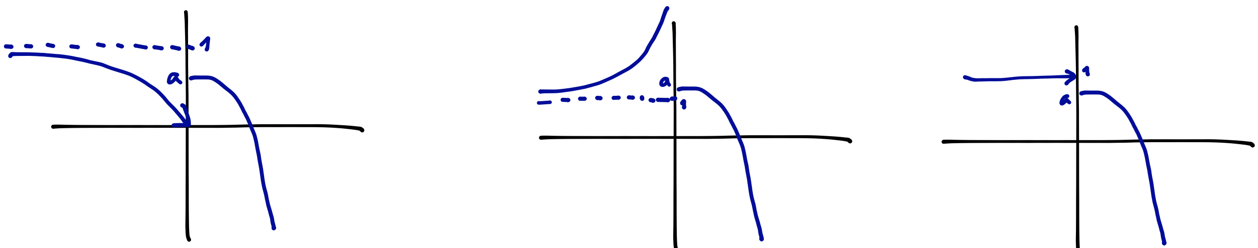
## 3. naloga

Za $a, b \in \mathbb{R}$ definirajmo funkcijo $f_{a,b} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} a - x^2, & x \geq 0, \\ e^{\frac{b}{x}}, & x < 0. \end{cases}$$

1. Za katere $a, b \in \mathbb{R}$ je $f_{a,b}$ injektivna funkcija?
2. Za katere $a, b \in \mathbb{R}$ je $f_{a,b}$ surjektivna funkcija?
3. Izračunaj kompozitum $f_{0,1} \circ f_{1,-1}$.

Oglejmo si graf funkcije $f_{a,b}$




$b > 0$ $b < 0$ $b = 0$

1. Če je $b=0$, je $f_{a,b}(-1) = f_{a,b}(-2) = 1$. $\Rightarrow f_{a,0}$ ni injektivna

Naj bo $b>0$.

- Če je $a \leq 0$, je $Z_{f|_{(-\infty,0)}} = (0,1)$, $Z_{f|_{[0,\infty)}} = (-\infty, a]$. Ker sta $f|_{(-\infty,0)}$ ter $f|_{[0,\infty)}$ injektivni in je $(0,1) \cap (-\infty, a] = \emptyset$, je $f_{a,b}$ injektivna.
- Če je $a>0$, obstaja $x_1<0$, da je $f_{a,b}(x_1) = \min\{\frac{a}{2}, \frac{1}{2}\}$ in obstaja $x_2>0$, da je $f_{a,b}(x_2) = \min\{\frac{a}{2}, \frac{1}{2}\}$ $\Rightarrow$
  $\Rightarrow f_{a,b}$ ni injektivna

Naj bo $b<0$.

- Če je $a \leq 1$, je $Z_{f|_{(-\infty,0)}} \cap Z_{f|_{[0,\infty)}} = \emptyset \Rightarrow f_{a,b}$ je injektivna
- Če je $a>1$, obstaja $x_1<0$, da je $f(x_1) = 1 + \frac{a}{2}$ in obstaja $x_2>0$, da je $f(x_2) = 1 + \frac{a}{2} \Rightarrow f$ ni injektivna

2. $b=0$: $Z_f = (-\infty, a] \cup \{1\} \neq \mathbb{R} \Rightarrow f_{a,b}$ ni surjektivna

$b>0$: $Z_f = (-\infty, a] \cup (0,1) \neq \mathbb{R} \Rightarrow f_{a,b}$ ni surjektivna

$b<0$: $Z_f = (-\infty, a] \cup (1, \infty)$

Če je $a \geq 1$, je $Z_f = \mathbb{R} \Rightarrow f_{a,b}$ je surjektivna

Če je $a<1$, $\frac{1+a}{2} \notin Z_f \Rightarrow f_{a,b}$ ni surjektivna

3. $x<0 \Rightarrow f_{0,1}(f_{1,-1}(x)) = f_{0,1}(e^{-\frac{1}{x}}) = 0 - e^{-\frac{1}{x}}$

$x \geq 0 \Rightarrow f_{0,1}(f_{1,-1}(x)) = f_{0,1}(1-x^2)$

$x \leq 1 \Rightarrow 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow f_{0,1}(f_{1,-1}(x)) = 0 - (1-x^2)^2 = -x^4 + 2x^2 - 1$

$x > 1 \Rightarrow 1-x^2 < 0 \Rightarrow f_{0,1}(f_{1,-1}(x)) = e^{\frac{1}{1-x^2}}$

$$f_{0,1}(f_{1,-1}(x)) = \begin{cases} -e^{-\frac{1}{x}}, & x<0, \\ -x^4+2x^2-1, & 0 \leq x \leq 1, \\ e^{1/1-x^2}, & x>1. \end{cases}$$

**4. naloga**

Naj bo

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{1-x}} + a, & x > 1, \\ \sin\frac{\pi(4x+9)}{6}, & 0 \le x \le 1, \\ b - \operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & x < 0. \end{cases}$$

1. Določi $a, b \in \mathbb{R}$, da bo $f$ zvezna na celi realni osi.
2. Določi zalogo vrednosti zvezne funkcije $f$.
3. Ali je zvezna funkcija $f$ monotona?

1. $\lim\limits_{x \downarrow 1}\left(e^{\frac{1}{1-x}} + a\right) = \sin\frac{\pi \cdot 13}{6}$

$a = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\sin\frac{\pi \cdot 9}{6} = \lim\limits_{x \uparrow 0}\left(b - \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)$

$\sin\frac{3\pi}{2} = -1 = b + \frac{\pi}{2}$

Funkcija $f$ bo zvezna, če je $a = \frac{1}{2}$ in $b = -1 - \frac{\pi}{2}$

2. $Z_{f|(1,\infty)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$Z_{f|[0,1]} = \left[-1, \frac{1}{2}\right]$ $\Rightarrow Z_f = \left(-1-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$Z_{f|(-\infty,0)} = \left(-1-\frac{\pi}{2}, -1\right)$

3. Ker sta $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ in $x \mapsto e^x$ naraščajoči na $(1,\infty)$, je kompozitum $x \mapsto e^{\frac{1}{1-x}}$ naraščajoča na $(1,\infty)$.
Torej je $f|_{(1,\infty)}$ naraščajoča.
Če je $0 \le x \le 1$, je $\frac{9\pi}{6} \le \frac{\pi(4x+9)}{6} \le \frac{13\pi}{6}$. Ker je funkcija sin naraščajoča na $\left[\frac{9\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right]$,
je $f|_{[0,1]}$ naraščajoča
Ker sta $x \mapsto \frac{1}{x}$ in $x \mapsto -\operatorname{arctg} x$ padajoči na $(-\infty,0)$, je kompozitum $x \mapsto -\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ naraščajoča na $(-\infty,0)$.
Torej je $f|_{(-\infty,0)}$ naraščajoča.
Ker je $f$ zvezna v 0 in 1, je $\lim\limits_{x \uparrow 0} f(x) \le f(0)$ in $f(1) \le \lim\limits_{x \downarrow 1} f(x)$ in zato je $f$ naraščajoča na $\mathbb{R}$.

**5. naloga**

Denimo, da za funkcijo $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ obstaja taka konstanta $C \geq 0$, da za poljubna $x, y \in \mathbb{R}_+$ velja

$$|f(x) - f(y)| \leq C|\sqrt{x} - \sqrt{y}|.$$

1. Dokaži, da je funkcija $f$ zvezna.
2. Dokaži, da obstaja natanko ena taka vrednost za $f(0)$, za katero vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

konvergira.

1. Rešitev A:

Naj bo $a \geq 0$ in $\varepsilon > 0$.

Ker je $x \longmapsto \sqrt{x}$ zvezna (v $a$), obstaja $\delta > 0$, da je $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \frac{\varepsilon}{C}$, če je $|x - a| < \delta$.

Če je $|x - a| < \delta$, je $|f(x) - f(a)| \leq C|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$. Torej je $f$ zvezna v $a$.

Rešitev B:

Naj bo $\varepsilon > 0$.

Ker je $|f(0) - f(x)| \leq C|0 - \sqrt{x}| = C\sqrt{x}$, definiramo $\delta = (\frac{\varepsilon}{C})^2$.

Če je $|0 - x| < \delta$, je $|f(0) - f(x)| \leq C\sqrt{x} < C \cdot \sqrt{(\frac{\varepsilon}{C})^2} = \varepsilon$. Torej je $f$ zvezna v $0$.

Naj bo $a > 0$ in $\varepsilon > 0$.

Ker je $|f(a) - f(x)| \leq C|\sqrt{a} - \sqrt{x}| = C \frac{|a - x|}{\sqrt{a} + \sqrt{x}} \leq \frac{C}{\sqrt{a}}|a - x|$, definiramo $\delta = \frac{\sqrt{a}\,\varepsilon}{C}$.

Če je $|a - x| < \delta$, je $|f(a) - f(x)| \leq \frac{C}{\sqrt{a}}|a - x| < \frac{C}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}\,\varepsilon}{C} = \varepsilon$. Torej je $f$ zvezna v $a \in (0, \infty)$.

2. Denimo, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n^3})$ konvergira. Tedaj je $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n^3}) = 0$. Ker je $f$ zvezna, je $f(0) = \lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n^3}) = 0$. Torej: Če vrsta konvergira, je $f(0) = 0$.

Pokažimo še, da če je $f(0) = 0$, vrsta res konvergira.

Ker velja $|f(\frac{1}{n^3})| = |f(0) - f(\frac{1}{n^3})| \leq C\left|0 - \sqrt{\frac{1}{n^3}}\right| = C\frac{1}{n^{3/2}}$ in ker vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^{3/2}}$ konvergira, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n^3})$ absolutno konvergira in zato tudi konvergira.