3. kolokvij iz Analize 1

3. 4. 2014

Veliko uspeha!

								Σ

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna $\boxed{\text{P}}$ oziroma napačna $\boxed{\text{N}}$.

Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- [N] Velja $\int \frac{2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} - \ln|x+1| + \ln(x^2+1) + 2\operatorname{arctg} x + C$.
- [P] Če je $f(\frac{2}{n}) - f(\frac{1}{n}) = 1$ za vse $n \in \mathbb{N}$, f ni enakomerno zvezna.
- [P] Funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je diferenciabilna v točki a natanko tedaj, ko je odvedljiva v a.
- [P] Vsaka zvezna funkcija na zaprtem intervalu je integrabilna.
- [N] ~~Funkcija arcsin je odvedljiva na $[-1,1]$.~~ ($\sqrt[3]{x^2+1}$)
- [N] Če je f dvakrat zvezno odvedljiva in velja $f'(a) = 0$ in $f''(a) > 0$, potem ima f v a lokalni maksimum.
- [P] Če je funkcija f odvedljiva v točki a, je f zvezna v a.
- [P] Če je soda funkcija f integrabilna na $[-a,a]$, je $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.
- [N] Če je odvedljiva funkcija f strogo naraščajoča na intervalu (a,b), je $f'(x) > 0$ za vse $x \in (a,b)$.
- [P] Funkcija $x \mapsto \frac{1}{x}$ je enakomerno zvezna na $[1,\infty)$.

(2) $1 \geq \frac{1}{x^2+1} \geq 0$ za $\forall x \Longrightarrow$

(5)

$\Longrightarrow D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2}} \cdot \frac{-2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{-2x}{\sqrt{x^4+2x^2}\,(x^2+1)} =$$

$$= \frac{-2x}{|x|\sqrt{x^2+2}\,(x^2+1)}$$

f je odvedljiva na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, (5)
ker sta levi in desni odvod različna!

(10) (−2) ČE NE OBR. $x=0$

Velja $|f'(x)| = \frac{2}{\sqrt{x^2+2}\,(x^2+1)} \leq \frac{2}{\sqrt{2}}$.

Ker je $|f'|$ omejen $\Longrightarrow$ f enakomerno zvezna! 10

③

a) (10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{\frac{1}{e}}$

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \Bigg[\underbrace{\left(1+\overbrace{\frac{\sin x - x}{x}}^{t}\right)^{\overbrace{\frac{x}{\sin x - x}}^{\frac{1}{t}}}}_{\downarrow\ e}\Bigg]^{\overbrace{\frac{\sin x - x}{x^3}}^{t\cdot\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} \overset{L'H}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}$$

b) (10) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)\cdot\overbrace{\sin\frac{\pi x}{2}}^{\to 1}}{\cos\frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\cos\frac{\pi x}{2}} \overset{L'H}{=}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{2x}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}} = -\frac{2}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{\pi}$$

(4) $f(x) = \operatorname{arctg} e^x - \frac{1}{2} \ln \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$

$x \to -\infty \to 0$, $x \to -\infty \to 1$

$D_f = \mathbb{R}$

$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

(5)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\frac{1}{2}\ln e^{2x}}{x} = -1 = k$$

$= -x$

$$n = \lim_{x\to-\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to-\infty} (-x+x) = 0$$

ASIMPTOTA $\boxed{(x \to -\infty) : y = -x}$ (5)

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}} \cdot \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2} =$$

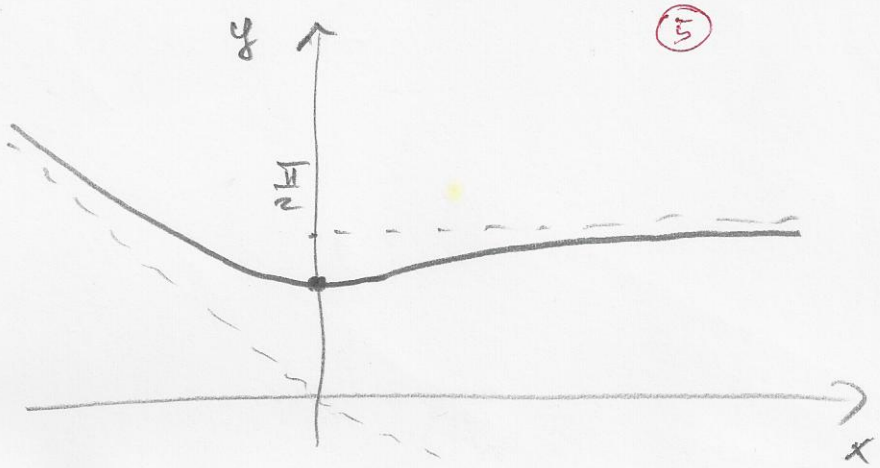
$$= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{1}{e^{2x}+1} = \frac{e^x - 1}{1+e^{2x}}$$

f pada na $x<0$, f roste na $x>0$

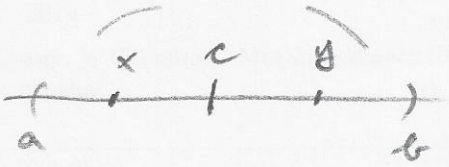
$f(0) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \underset{\overset{\wedge}{0}}{\ln \frac{1}{2}} > \frac{\pi}{4}$ je globální

(5)

minimum $\Longrightarrow$ f nima nule; (5)



(5) $f:(a,b) \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$



- Recimo, da je $f'(x_0) > 0$ za nek $x_0 \in (a,c)$.
  Potem je $f'(y) < 0$ za $\forall y \in (c,b) \Rightarrow$
  $\Rightarrow f'(x) > 0$ za $\forall x \in (a,c)$.
  Torej f strogo raste na (a,c) in strogo pada na $(c,b) \Rightarrow c$ je globalni max.
- Če je $f'(x_0) < 0$, enako izpeljemo, da je c globalni minimum!

SAMO SKLEP: pada \ raste brez dokaza = (10)

$\longrightarrow$ BREZ TEGA ($f'(x)=0 \Rightarrow ..$) (4)