4. kolokvij iz Analize 1

6. 6. 2012

Vse odgovore utemelji!

1. naloga

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna $\boxed{\text{P}}$ oziroma napačna $\boxed{\text{N}}$.

Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- ☐ Če je d metrika na množici M, potem je tudi $\bar{d}\colon M \times M \to \mathbb{R}$, podana s predpisom $\bar{d}(x,y) = 5d(x,y)$, metrika na M.
- ☐ Če vrsta konvergira, potem tudi absolutno konvergira.
- ☐ Če je $|f_n(x)| \leq c_n$ za vse $n \in \mathbb{N}$ in $x \in D$ ter vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergira, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergira enakomerno na D.
- ☐ Predpis $d(x,y) = |x^2 - y^2|$ je metrika na $\mathbb{R}$.
- ☐ Integral $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^s} dx$ obstaja natanko tedaj, ko je $s < 2$.
- ☐ Če je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ razvoj funkcije f v Taylorjevo vrsto, je $f^{(n)}(a) = \frac{a_n}{n!}$.
- ☐ Če za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s pozitivnimi členi velja $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ za vse $n \in \mathbb{N}$, potem vrsta konvergira.
- ☐ Zaprta podmnožica kompaktnega metričnega prostora je kompaktna.
- ☐ Zaporedje funkcij $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n(x) = x^n$, konvergira enakomerno na $[0,1]$.
- ☐ Če je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

2. naloga

a) Izračunaj ploščino območja, ki ga objema krivulja z enačbo $y^2 = x^2 - x^4$.

b) Ugotovi za katera števila $a > 0$ obstaja posplošeni integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{xe^{-\sqrt{x}}}{\ln(1+x^a)}dx$.

3. naloga

Ugotovi, ali vrsti konvergirata in ali vrsti absolutno konvergirata.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(10n+7)}{\sqrt{n^3+1}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{n-1}\right)$

4. naloga

Funkcijo, dano s predpisom $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^2}$, razvij v Taylorjevo vrsto okrog $a = 0$. Določi konvergenčno območje vrste. Izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{2^k}.$$

5. naloga

Za $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ definiramo

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |y_2 - y_1|, & x_1 = x_2, \\ |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| + 1, & x_1 \neq x_2. \end{cases}$$

a) Dokaži, da je d metrika na $\mathbb{R}^2$.

b) Skiciraj zaprti krogli $\overline{K}((0,0),1)$ in $\overline{K}((0,0),2)$.

c) Ali je preslikava $f : (\mathbb{R}^2, d) \to (\mathbb{R}^2, d)$, podana s predpisom $f(x, y) = (y, x)$, zvezna?