

Analiza 1: 4. kolokvij

27. 5. 2010

Čas pisanja je 100 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko sreče!

Naloga 1

Dan je lik $L = \{(x, y) \mid x \in [-\pi, \pi], -1 \leq y \leq \cos x\}$ v ravnini xy . Izračunaj prostornino telesa, ki ga dobimo, če lik L zavrtimo okrog osi y .

Naloga 2

a) Ugotovi ali konvergira integral

$$I = \int_2^{\infty} \frac{x \, dx}{e^x - e} ?$$

b) Ugotovi za katera realna števila $0 < a < b$ konvergira integral

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln x \cdot \operatorname{arctg} x}{x^a + x^b} dx.$$

Naloga 3

Izračunaj limiti

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{\operatorname{tg} x - x}$$

b)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^4 \sqrt{1 + t^4} - t^2}{2t^2 \cos \frac{1}{t} - 2t^2 - 1}$$

Naloga 4

Naj bosta (M_1, d_1) in (M_2, d_2) metrična prostora. Na produktu $M_1 \times M_2$ definiramo *produktno metriko* s predpisom

$$D_*((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)).$$

a) Dokaži, da je D_* res metrika na produktu $M_1 \times M_2$.

b) Skiciraj kroglo $K((0, 0, 0), 1)$ v primeru, ko sta $M_1 = \mathbb{R}^2$ in $M_2 = \mathbb{R}$ opremljena z evklidskima metrikama.

c) Naj bo (M, d) metrični prostor. Dokaži, da je preslikava $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna, če $M \times M$ opremimo s produktno metriko, na \mathbb{R} pa vzamemo običajno metriko.