

ANALIZA 1  
12. domača naloga

- (1) Po definiciji preveri, da je funkcija  $\sqrt[3]{x}$  zvezna na  $\mathbb{R}$ .  
(2) Naj bo

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}.$$

- (a) Določi definicijsko območje  $D_f$  funkcije  $f$  in množico  $A = \{x \in D_f \mid f \text{ zvezna v } x\}$ .  
(b) Naj bo

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ b, & x = 0. \end{cases}$$

Določi tak  $b$ , da bo  $g$  zvezna funkcija na  $A \cup \{0\}$ .

- (c) Za izbran  $\varepsilon > 0$  določi  $\delta > 0$ , za katerega velja

$$|x - 0| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(0)| < \varepsilon.$$

- (a)  $D_f = [-1, 0) \cup (0, \infty) = A$ .  
(b)  $b = \frac{1}{2}$ .  
(c) Sklep velja za  $\delta = \min\{1, 2\varepsilon\}$  (in gotovo tudi za vse manjše  $\delta$ ).

- (3) Naj bo

$$f(x) = \begin{cases} -x - 5, & x \leq -2, \\ ax^2 + b, & -2 < x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1. \end{cases}$$

Določi taki realni števili  $a$  in  $b$ , da bo funkcija  $f$  zvezna na  $\mathbb{R}$ . Pri tako določenih  $a$  in  $b$  poišči zalogo vrednosti funkcije  $f$  ter ugotovi ali je injektivna.

$a = -1, b = 1, Z_f = [-3, \infty)$ . Funkcija  $f$  ni injektivna.

- (4) Funkcija  $f$  je podana s predpisom

$$f(x) = \frac{2e^{\frac{1}{2x}} + a}{\sqrt{a^2 - 1 + e^{\frac{1}{x}}}}.$$

- (a) Določi definicijsko območje funkcije  $f$  v odvisnosti od realnega parametra  $a$ .  
(b) Za katere vrednosti parametra  $a$  je mogoče izbrati tak  $f(0)$ , da bo dobljena funkcija zvezna v 0?  
(c) Za katere vrednosti parametra  $a$  je mogoče funkcijo  $f$  zvezno razširiti na  $\mathbb{R}$ ?

- (a) Če je  $|a| \geq 1$ , potem je  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Če je  $|a| < 1$ , potem je  $D_f = \left(-\infty, \frac{1}{\ln(1-a^2)}\right) \cup (0, \infty)$ .  
(b) Za  $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .  
(c) Za  $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

- (5)\* Funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je dana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x \left[ \frac{2}{x} \right], & x \neq 0, \\ k, & x = 0, \end{cases}$$

kjer  $[y]$  pomeni celi del od  $y$ , to je največje celo število, ki ni večje od  $y$ .

- (a) Določi tako konstanto  $k$ , da bo funkcija  $f$  zvezna v 0, če je to mogoče.  
(b) Ugotovi, v katerih točkah je funkcija  $f$  zvezna in v katerih točkah funkcija  $f$  ni zvezna. (Nasvet: leva in desna limita)

- (a)  $k = 2$ . (b)  $f$  ni zvezna v točkah  $\frac{2}{m}$  za  $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , drugje je zvezna.