

ANALIZA 1
15. domača naloga

- (1) Naj bo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija in $A = (a, b)$ točka v ravnini, ki ne leži na grafu Γf funkcije f .
- (a) Pokaži, da vedno obstaja točka B na grafu Γf , ki je najmanj oddaljena od točke A .
(b) Pokaži, da normala na graf Γf v točki B vsebuje točko A .
- (2) Naj bo $p(x) = x^2$ in (a, b) točka v ravnini.
- (a) Pokaži, da kvečjemu za tri točke $(x, p(x))$ točka (a, b) leži na normali na graf funkcije p v točki $(x, p(x))$.
(b) Poišči vsaj eno točko v ravnini, ki leži na natanko treh normalah na graf funkcije p .
- (3) S pomočjo diferenciala izračunaj približke za naslednje izraze.
(a) $\arctg 1, 101$ (b) $\arcsin 0, 48$

$$(a) \pi/4 + 0,0505 \approx 0,836 \quad (b) \pi/6 - 0,04/\sqrt{3} \approx 0,5$$

- (4) Izračunaj približno vrednost funkcije $f(x) = \sqrt[5]{\frac{2-x}{2+x}}$ v točki $-0,05$ z uporabo diferenciala.

$$1,01$$

- (5) Poišči vse intervale, na katerih je funkcija $f(x) = x + \arcsin(\cos x)$ konstantna in na vsakem od teh intervalov izračunaj njeno vrednost.

$$f \text{ je konstantna na intervalih } [2k\pi, (2k+1)\pi], k \in \mathbb{Z}; f = 2k\pi + \pi/2 \text{ na } [2k\pi, (2k+1)\pi].$$

- (6) Dokaži, da se funkciji

$$f(x) = \arctg\left(\frac{1}{2x^2}\right) \text{ in } g(x) = \arctg\left(\frac{1}{2x-1}\right) - \arctg\left(\frac{1}{2x+1}\right)$$

na vsakem intervalu, kjer sta obe definirani, razlikujeta le za konstanto. Izračunaj $f - g$.

$$f(x) - g(x) = \begin{cases} \pi, & 0 < |x| < 1/2, \\ 0, & |x| > 1/2. \end{cases}$$

- (7) Po definiciji preveri, da je dana funkcija odvedljiva v $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \pi(\sqrt{x+1} - 1), & -1 < x \leq 0, \\ x \arctg\left(1 + \frac{1}{x}\right), & x > 0. \end{cases}$$

- (8) Pokaži, da ima $f(x) = 3x + \sin(2x)$ inverzno funkcijo in izračunaj $(f^{-1})'(3\pi)$.

$$0,2$$

- (9) Za $a, b, c \in \mathbb{R}$ naj bo funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1, \\ e \ln x, & 1 \leq x \leq e^3, \\ c\sqrt[3]{x}, & x > e^3. \end{cases}$$

- (a) Določi a, b, c tako, da bo f zvezno odvedljiva na \mathbb{R} .
(b) Pokaži, da obstaja inverzna funkcija f^{-1} .
(c) Izračunaj $(f^{-1})'(2e)$.
(d) Izračunaj f^{-1} .

$$(a) a = e, b = -e, c = 3 \quad (b) e \quad (c) f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{e} + 1, & x < 0, \\ e^{x/e}, & 0 \leq x \leq 3e, \\ \frac{x^3}{27}, & x > 3e. \end{cases}$$

- (10) Za katere $a, b \in \mathbb{R}$ je

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ b, & x = 0, \end{cases}$$

zvezno odvedljiva na \mathbb{R} ?

$$a > 2, b = 0$$