Analiza 1

17. domača naloga

(1) Naj bo $a > 0$. Dokaži, da za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ velja
$$\left|\ln \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{y + \sqrt{a^2 + y^2}}\right| \le \frac{|x - y|}{a}.$$
Poišči največji interval, na katerem je funkcija $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$ enakomerno zvezna. Na tem intervalu za dan $\varepsilon > 0$ poišči $\delta > 0$, ki bo ustrezal definiciji enakomerne zveznosti.

Funkcija je enakomerno zvezna na $\mathbb{R}$. Za δ lahko vzamemo poljubno število na intervalu $(0, a\varepsilon)$.

(2)* Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija in naj bo $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 f'(x) = 0$. Dokaži, da obstaja $\lim_{x\to\infty} f(x)$, in sicer tako, da najprej pokažeš, da velja točka (a), nato, da velja (b), in na koncu, da obstaja limita.
(a) Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $x_0 > 0$, da za vsak $x > x_0$ in vsak $c > 1$ velja
$$|f(x) - f(cx)| < \frac{\varepsilon(c-1)}{x}.$$
(b) Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $x_0 > 0$, da za vsak $x > x_0$, vsak $c > 1$ in vsak $n \in \mathbb{N}$ velja
$$|f(x) - f(c^n x)| < \frac{\varepsilon c}{x}.$$

(3) Izračunaj naslednje limite.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x}$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4}{e^x}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[5]{x-1}}$ (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \operatorname{arctg} 3x}{\sin 5x}$ (f) $\lim\limits_{x\downarrow 0} x \ln^3 x$

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{1/x} - 1)$ (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$ (i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \operatorname{arctg} x}{x^6 + x^2 + 1}$

(j) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + x}}{2x}$ (k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \sin x}{(e^x - 1)^2}$ (l) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1 + e^x}{2\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$

(m) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a}{x} - \dfrac{\ln(1 + ax)}{x^2}\right)$ (n) $\lim\limits_{x\downarrow 0} x^{\frac{1}{1-x}}$ (o) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

(a) 1 (b) 0 (c) 0 (d) 0 (e) $\frac{3}{5}$ (f) 0 (g) 1 (h) $\frac{1}{2}$ (i) 0 (j) $-\frac{1}{2}$ (k) 1 (l) $\frac{1}{2}$ (m) $\frac{a^2}{2}$ (n) 0 (o) $\frac{1}{e}$

(4) Izračunaj naslednje limite.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x - 2^x}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to e} (\ln x)^{1/(x-e)}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 + x^2}\cos x}{x^4}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x \sin x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$ (e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x^2 - \frac{4x-4}{x+1}}{\sin^3(\pi x)}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2\arccos x) - 2x}{x^3}$

(g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$ (h) $\lim\limits_{x\to 0} (x + e^x)^{1/x}$ (i) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{\sin(\pi x)} + \dfrac{\cos(\pi x)}{\pi(1-x)}\right)$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ (k) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n}{x^n}$ (l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

(m) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$ (n) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 - 2x + 3}\right)$

(a) ∞ (b) $e^{1/e}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{6}$ (e) $-\frac{1}{6\pi^3}$ (f) -1 (g) -1 (h) e^2 (i) $-\frac{1}{\pi}$ (j) 0 (k) 2^n (l) $\frac{1}{3}$ (m) $\frac{1}{e}$ (n) -2

(5) Pokaži, da za x blizu 0 velja približek $\arcsin x \approx x + \frac{1}{6}x^3$ v naslednjem smislu: ko gre x proti 0, gre razlika med levo in desno stranjo proti 0 hitreje kot funkcija $x \mapsto x^4$.

(6) Naj trikrat zvezno odvedljiva funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadošča enačbi $\exp(f(x)) + f(x) = 1 + x$. Določi konstanti A in B tako, da bo obstajala (končna) limita
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - Ax - B}{x^2}$$
in to limito izračunaj!

$A = 1/2$, $B = 0$, limita je enaka $-1/16$.