Analiza 1

19. domača naloga

(1) Krivulja K je podana parametrično z

$$x(t) = 4 + 2\ln t, \quad y(t) = t + \frac{1}{t}, \quad t > 0.$$

Določi točko T na krivulji K, ki je najbližja abscisni osi.

$\boxed{T(4,2)}$

(2) Nariši krivuljo, podano v parametrični obliki.

(a) $x(t) = t^3 + 3t + 1,\ y(t) = t^3 - 3t + 1.$

(b) $x(t) = t^4 + 1,\ y(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$

(c) $x(t) = te^t,\ y(t) = te^{-t}$

(d) $x(t) = \operatorname{tg} t,\ y(t) = \dfrac{1}{\sin t}$

(e) $x(t) = \dfrac{t^2}{t-1},\ y(t) = \dfrac{t}{t^2-1}$

(f) $x(t) = \sin(2t),\ y(t) = \sin^2 t$

(3) Nariši krivuljo, podano v polarnih koordinatah. Če je mogoče, določi tudi red krivulje.

(a) $r(\varphi) = 2\cos\varphi$ (b) $r(\varphi) = \sin 3\varphi$ (c) $r(\varphi) = 4 + \cos 6\varphi$

(d) $r(\varphi) = \dfrac{1}{\sin\varphi}$ (e) $r(\varphi) = \dfrac{\sin\varphi}{\varphi}$ (f) $r(\varphi) = \dfrac{\sin\varphi}{1 - 2\cos\varphi}$

(4) Skiciraj krivuljo, ki je podana v implicitni obliki.

(a) $2x^3 - 3xy - y^3 = 0$ (Nasvet: parameter $t = y/x$.)

(b) $(x^2 + y^2)^3 = 4xy(x^2 - y^2)$ (Nasvet: polarne koordinate.)

(5) Naj bo dana krožnica $K \subset \mathbb{R}^2$ s središčem v izhodišču in polmerom $a > 0$. Za vsako točko $M \in K$ naj bo P pravokotna projekcija M na abscisno os in Q pravokotna projekcija točke P na premico skozi točko M in izhodišče. Določi enačbo krivulje L, ki jo opiše točka Q (ko M potuje po krožnici), in jo skiciraj.

Krivulja L je v polarnem zapisu dana z enačbo $r = a\cos^2\varphi$.

(6) Krivulja P naj bo dana z enačbo $y^2 = x$. Za vsako točko $M \in P \setminus \{(0,0)\}$ naj bo A_M tista točka na poltraku iz točke $(0,0)$ skozi M, za katero je produkt oddaljenosti točke M od izhodišča in oddaljenosti A_M od izhodišča enak 1. Čim bolj natančno nariši krivuljo $K = \{A_M | M \in P \setminus \{(0,0)\}\}$.

Krivulja K je v polarnem zapisu dana z enačbo $r = \dfrac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$, $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2) - \{0\}$.

(7) Izračunaj n-ti odvod funkcije $g(x) = x\ln(x+1)$.

$g'(x) = \dfrac{x}{x+1} + \ln(x+1)$, $g^{(n)}(x) = (-1)^n(n-2)!\dfrac{x+n}{(x+1)^n}$ za $n \geq 2$.

(8) (a) Pokaži, da je odvod sode funkcije liha funkcija, odvod lihe funkcije pa soda funkcija.

(b) Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soda poljubno mnogokrat odvedljiva funkcija. Izračunaj $f^{(2n-1)}(0)$ za vse $n \in \mathbb{N}$.