Analiza 1

1. domača naloga

(1) S popolno indukcijo pokaži, da za vsako naravno število n veljata enakosti

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2\,,$$

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{(2n-1)2n(2n+1)}{6}\,.$$

(2) Dokaži, da je za vsako naravno število $n\geq 2$ število $2^{2^n}-1$ deljivo s 15.

(3) Pokaži, da za vsako realno število x in za vsako naravno število n velja

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{2^n-2}+x^{2^n-1}\,.$$

(4) Pokaži, da za vsako celo število n obstajata celi števili a in b, da velja $(1+\sqrt{2})^n=a+b\sqrt{2}\,.$

(5) Pokaži, da je za vsako naravno število n izraz $2^{2n+1}-9n^2+3n-2$ deljiv s 54.

(6) Naj bo $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{k\pi}{2^m}|k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{N}\}$. Pokaži, da za vsako naravno število $n\in\mathbb{N}$ velja

$$\frac{1}{\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin 2^2\alpha}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n\alpha}=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}-\frac{1}{\operatorname{tg}2^n\alpha}.$$

(7) Naj bo $h\in[0,1]$. Pokaži, da za vsak $n\in\mathbb{N}$ velja $(1+h)^n\leq 1+(2^n-1)h$.

(8) Pokaži, da je za vsako naravno število n število $1+2^{3n+1}+2^{6n+2}$ deljivo s 7.

(9)* Pokaži, da za vsako naravno število n, velja

$$\frac{n}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}\leq n\,.$$

(10) Pokaži:
(a) Za poljubni realni števili x,y velja $|\sin(x+y)|\leq|\sin x|+|\sin y|$.
(b) Za vsak $x\in\mathbb{R}$ in $n\in\mathbb{N}$ velja $|\sin(nx)|\leq n|\sin x|$. Ali ta neenakost velja za poljuben pozitiven n?

(11)* Naj bodo $x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots$ pozitivna realna števila in naj bo $s_n=\sum_{k=1}^n x_k$. Pokaži, da velja

$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{x_k}\geq\frac{n^2}{s_n}\,.$$