

ANALIZA 1  
23. domača naloga

(1) Naj bo  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  zvezna funkcija.

(a) Dana je funkcija  $F(x) = \int_0^x f(t^2) dt$ . Utemelji, da je  $F$  odvedljiva in izračunaj njen odvod.

(b) Dana je funkcija  $G(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt$ . Utemelji, da je  $G$  odvedljiva in izračunaj njen odvod.

(c) Najmanj koliko in največ koliko rešitev ima lahko enačba  $F(x) = G(x)$ ?

(a)  $F'(x) = f(x^2)$  (b)  $G'(x) = 2xf(x^2)$  (c) Enačba ima lahko eno ali dve rešitvi.

(2) Poišči vse odvedljive funkcije  $f$ , za katere je povprečna vrednost funkcije  $f$  na intervalu  $[0, x]$  enaka  $f(x)$ .

$f$  je lahko poljubna konstantna funkcija.

(3) Dani sta funkciji  $f(x) = 2^x - 1$  in  $g(x) = -x + 5$ . Ugani, v kateri točki se grafa  $f$  in  $g$  sekata. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujejo graf funkcije  $f$ , graf funkcije  $g$  in abscisna os.

Grafa se sekata v  $(2, 3)$ . Ploščina je  $\frac{3}{\ln 2} + \frac{5}{2}$ .

(4) Izračunaj integrale

(a)  $\int_{\ln \pi}^{\ln(3\pi/2)} e^x \sin(e^x) dx$  (b)  $\int_1^{e^3} x \ln x dx$

(c)  $\int_{-1}^1 \sqrt{\operatorname{ch} x - 1} dx$  (d)  $\int_0^\infty e^{-2x} dx$

(e)  $\int_{-\infty}^\infty |2 - x| \exp(-|x|) dx$  (f)  $\int_0^\pi \frac{ab(a^2 + b^2)}{a^4 \cos^2 x + a^2 b^2 + b^4 \sin^2 x} dx, a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(a)  $-1$  (b)  $\frac{5e^6 + 1}{4}$  (c)  $4\sqrt{2}(\operatorname{ch} \frac{1}{2} - 1)$  (d)  $\frac{1}{2}$  (e)  $4 + 2e^{-2}$  (f)  $\pi$ , če je  $ab > 0$ ;  $-\pi$ , če je  $ab < 0$ .

(5) Skiciraj grafa funkcij  $f(x) = 8 \ln x$  in  $g(x) = x^3 \ln x$  ter izračunaj ploščino omejenega lika, ki ga grafa določata.

$12 \ln 2 + \frac{15}{16} - 8$

(6) Izračunaj ploščino območja med grafom funkcije  $f(x) = (x^2 - 4)e^{-x}$  na intervalu  $[0, \infty)$  in abscisno osjo.

$2 + 12e^{-2}$

(7) Naj bo  $f(x) = e^x + x^3 - 1$  in  $g(x) = x^3 e^x$ . Skiciraj grafa funkcij  $f$  in  $g$  in izračunaj ploščino omejenega lika, ki ga grafa določata.

$3e - \frac{31}{4}$

(8) Funkcija  $f: [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  je dana s predpisom  $f(x) = \frac{1}{1 + 2 \cos^2 x}$ . Izračunaj ploščino omejenega lika med grafom funkcije  $f$  in premico  $y = \frac{1}{2}$ .

$\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

(9) (a) Izračunaj  $\int \frac{x + 6}{2x^2 + 3x} dx$ .

(b) Po definiciji preveri, ali obstaja integral  $\int_{-1}^1 \frac{x + 6}{2x^2 + 3x} dx$ .

(c) Po definiciji preveri, ali obstaja integral  $\int_1^\infty \frac{x + 6}{2x^2 + 3x} dx$ .

Nedoločeni integral je enak  $2 \ln |x| - \frac{3}{2} \ln |2x + 3| + C$ . Določena integrala ne obstajata.