Analiza 1

**24. domača naloga**

(1) Naj bo $K$ krivulja, podana z enačbo $y = e^{-x}$, in $t$ tista tangenta na krivuljo $K$, ki poteka skozi izhodišče. Določi ploščino območja, ki ga oklepajo krivulja $K$, njena asimptota in tangenta $t$.

$\boxed{e/2}$

(2) Naj bo $L$ omejen lik, ki ga omejujeta grafa funkcij $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ in $g(x) = \frac{1}{2}$. Izračunaj prostornino telesa, ki ga dobimo z vrtenjem lika $L$ okrog abscisne osi.

$\boxed{\pi^2/4}$

(3) Naj bo

$$f(x) = \frac{-1+\ln x}{\sqrt{x}},$$

$a$ ničla funkcije $f$ in $b$ točka, kjer $f$ zavzame maksimum. Izračunaj prostornino vrtenine, ki nastane, če del grafa funkcije $f$ nad intervalom $[a, b]$ zavrtimo okoli abscisne osi.

$\boxed{8\pi/3}$

(4) Naj bodo $a, b$ in $c$ pozitivna realna števila. Telo $D$ ima osnovno ploskev

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = 0,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}.$$

Presek $D$ z ravnino $y = k$, $-b < k < b$ je lik nad ravnino $xy$, ki ga omejuje odsek parabole s temenom v točki $(0, k, c)$. Izračunaj volumen $D$!

$\boxed{\frac{2\pi}{3}abc}$

(5) Ugotovi, za katere $r \in \mathbb{R}$ obstaja integral

$$\int_1^\infty \frac{5x+2}{x^r+x}\,dx$$

in odgovor utemelji. Če obstaja, izračunaj dani integral za $r = 3$.

$\boxed{\text{Integral obstaja za } r > 2. \text{ Pri } r = 3 \text{ je enak } \frac{5\pi}{4} + \ln 2.}$

(6) Obravnavaj konvergenco naslednjih integralov.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^4+1}}$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2x^2-3x+2}{\sqrt[3]{x^9-3x^5+5x}}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2\ln(x^2+1)}{x^4+4}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^3+x^6}}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{e^x-e}\,dx$ (h) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{e^x-e}\,dx$ (i) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^2+4}\,dx$

| | | |
|---|---|---|
| (a) konvergira | (b) divergira | (c) konvergira |
| (d) konvergira | (e) konvergira | (f) konvergira |
| (g) divergira | (h) konvergira | (i) divergira |

(7) Obravnavaj konvergenco naslednjih integralov v odvisnosti od realnih parametrov $p$, $q$ in $r$.

(a) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln^p(\ln x)}$ (b) $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(x-1)^{q-1}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p\operatorname{arctg} x}{1+x^q}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(1+x^p)}{1+x^p}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(1+x)}{x^p(x+q)^r}\,dx$

| | | |
|---|---|---|
| (a) divergira za vse $p$ | (b) konvergira za $p, q > 0$ | (c) konvergira za $\begin{cases} -2 < p < q-1, & \text{če je } q \geq 0 \\ q-2 < p < -1, & \text{če je } q < 0 \end{cases}$ |
| (d) konvergira za $p > 0$ | (e) konvergira za $p > 1$ | (f) konvergira za $\begin{cases} 1-r < p < 2, & \text{če je } q > 0 \\ 1 < p+r < 2, & \text{če je } q = 0 \\ 1-r < p < 2,\ r < 1 & \text{če je } q < 0 \end{cases}$ |