Analiza 1
25. domača naloga

(1) Izračunaj prostornino vrtenine, ki nastane pri vrtenju
(a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x^2 + x + 1}{x^3 - x^2 + 4x - 4}}$ na intervalu $[2, 2\sqrt{3}]$ okrog abscisne osi.
(b) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x} + 1}$, $\quad x \geq 0$ okrog abscisne osi.
(c) krivulje $x = 1 - \cos t$, $y = t - \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ okoli njene navpične tangente.

$\boxed{\text{(a) } \pi \ln(4\sqrt{3} - 2) + \frac{\pi^2}{8} \text{ (b) } \frac{\pi}{4} \text{ (c) } \pi^2}$

(2) Naj bo dana krožnica $K \subset \mathbb{R}^2$ s središčem v izhodišču in polmerom $a > 0$. Za vsako točko $M \in K$ naj bo P pravokotna projekcija M na abscisno os in Q pravokotna projekcija točke P na premico skozi točko M in izhodišče. Izračunaj ploščino območja, ki ga omejuje krivulja L!

$\boxed{\frac{3\pi a^2}{8}}$

(3) Krivulja P naj bo dana z enačbo $y^2 = \frac{3}{2}x$. Za vsako točko $M \in P \setminus \{(0,0)\}$ naj bo A_M tista točka na poltraku iz točke $(0,0)$ skozi M, za katero je produkt oddaljenosti točke M od izhodišča in oddaljenosti A_M od izhodišča enak 1. Izračunaj ploščino lika med krivuljama P in K.

$\boxed{\frac{7\sqrt{3}}{12} - \frac{2\pi}{9}}$

(4) Naj bo $a > 0$. Izračunaj dolžino dela krivulje
(a) $f(x) = \ln(1 - x^2)$ nad intervalom $[0, \frac{1}{2}]$.
(b) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ med dvema zaporednima točkama, ki ležita na abscisni osi.
(c) $r = e^{a\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, znotraj kroga $x^2 + y^2 \leq 1$.

$\boxed{\text{(a) } \ln 3 - \frac{1}{2} \text{ (b) } 8a \text{ (c) } \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}}$

(5) Krivulja K je podana parametrično z

$$x(t) = 4 + 2\ln t, \quad y(t) = t + \frac{1}{t}, \quad t > 0.$$

(a) Določi točko T na krivulji K, ki je najbližja abscisni osi.
(b) Izračunaj dolžino krivulje K med točko T in točko, kjer krivulja seka premico $x = 8$.

$\boxed{\text{(a) } T(4,2) \text{ (b) } e^2 - e^{-2}}$

(6) Naj bo $f\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, za katero obstaja integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{f^2(t)}{t^2} dt$.
(a) Dokaži, da obstaja integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1 + f^2(t)}{t^2} dt$.
(b)* Dokaži, da obstaja integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|f(t)|}{t^2} dt$.

(7) Naj bo $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in $\lim_{x\to\infty} f(x) = c > 0$.
(a) Dokaži, da za vsak $a \geq 0$ obstaja tak $b \geq 0$, da je $\displaystyle\int_0^b f(t)dt = a$.
(b)* Dokaži, da obstaja tak $M \geq 0$, da je za vsak $a \geq M$ število b, ki ustreza pogojem iz točke (a), enolično določeno.

(8) Izračunaj $I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$ za $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$\boxed{I_n = n!}$

(9)* Ali ima telo, ki ga dobimo z rotacijo krivulje $f(x) = \dfrac{\sin(ax)}{x}$ (definirane na vsem $\mathbb{R}$) okoli abscisne osi končen volumen za kak $a \in \mathbb{R}$? Če volumen obstaja, ga izračunaj; pri tem si lahko pomagaš z enakostjo

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$