Analiza 1

26. domača naloga

(1) Dano je funkcijsko zaporedje $f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{\ln(1 + x/n)}{x+1}.$$

(a) Dokaži, da zaporedje konvergira po točkah na $[0,\infty)$ in določi limitno funkcijo.
(b) Dokaži, da zaporedje konvergira enakomerno na $[0,a]$ za vsak $a > 0$.
(c) Ali je konvergenca enakomerna na $[0,\infty)$? Odgovor utemelji.

$\boxed{\text{(a) } f(x) = 0 \quad \text{(b) Da, konvergenca je enakomerna.}}$

(2) Za $n \in \mathbb{N}$ in $x > 0$ definirajmo

$$f_n(x) = n^2\left(\sqrt{x + \tfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right) \qquad \text{in} \qquad g_n(x) = 5\sqrt[3]{n}\left(\sqrt{x + \tfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right).$$

(a) Ali funkcijsko zaporedje f_n konvergira na intervalu $(0,\infty)$? Ali konvergira enakomerno?
(b) Ali funkcijsko zaporedje g_n konvergira na intervalu $(0,\infty)$? Ali konvergira enakomerno?

$\boxed{\text{(a) Divergira za vsak } x.\text{ (b) Enakomerno konvergira proti } g(x) = 0.}$

(3) Določi množico $D \subset \mathbb{R}$ tistih števil x, za katere konvergira vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} nx}{n^2}$. Ali vrsta za $x \in D$ konvergira absolutno? Ali vrsta konvergira enakomerno na D? Utemelji!

$\boxed{\text{Vrsta konvergira enakomerno na } D = \mathbb{R}.}$