Analiza 1

27. domača naloga

(1) Pokaži, da funkcijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n}$ konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$. Ali vrsta konvergira enakomerno na $\mathbb{R}$? Določi vse $x \in \mathbb{R}$, za katere vrsta konvergira absolutno, in izračunaj vsoto vrste.

Vrsta konvergira proti funkciji $f(x) = -\frac{x^2}{x^2+2}$ enakomerno in absolutno na $\mathbb{R}$.

(2) Določi območje konvergence za naslednje vrste.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{1+\ln n}(x-1)^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{3+n}(x-1)^n$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{n^2 9^n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n^n}}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+\ln n}(2x+1)^n$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n(n+2)}}{(n+2)^{n^2}} x^{3n}$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$

(a) $(0,2)$ (b) $[0,2)$ (c) $[-1,5]$ (d) $\mathbb{R}$ (e) $[-1,0)$ (f) $\{0\}$ (g) $[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$

(3) Razvij funkcijo $f(x) = xe^{x+2}$ v Taylorjevo vrsto okrog točke -1 in ugotovi, kje dobljena vrsta konvergira. Izračunaj še $f^{(2004)}(-1)$.

Taylorjeva vrsta je $-e + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e(n-1)}{n!}(x+1)^n$ in konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$. $f^{(2004)}(-1) = 2003e$.

(4) Razvij funkcijo $f(x) = \ln \sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}}$ v Taylorjevo vrsto okoli izhodišča in določi območje konvergence.

Taylorjeva vrsta je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-2)^n}{3n} x^n$ in konvergira na $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

(5) (a) Razvij funkcijo $\arcsin x$ v Taylorjevo vrsto okrog 0 in določi njen konvergenčni radij.

(b) S pomočjo točke (a) izračunaj limito $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - x}{x^3}$.

(a) $\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, konvergenčni polmer je 1. (b) $\frac{1}{6}$

(6) Naj bo $f(x) = \frac{7x+1}{2x^2+x-1}$. Funkcijo f razvij v Taylorjevo vrsto s središčem v 0, ugotovi, kje ta vrsta konvergira, in določi $f^{(2001)}(0)$.

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(2(-1)^n - 3\cdot 2^n)x^n$ na $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $f^{(2001)}(0) = -2001!(2+3\cdot 2^{2001})$.

(7) Za funkcijo f, določeno z $\sin x + \sin f(x) = 1$ in $f(\pi/2) = \pi$, zapiši Taylorjev polinom tretje stopnje!

$T_3(x) = \pi - \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2$.

(8) (a)* Pokaži, da za nek $c > 0$ velja neenakost $x - \frac{1}{6}x^3 \le \sin x \le x - \frac{1}{12}x^3$ za vsak $x \in [0,c]$.

(b) Ugotovi, za katere $a \in \mathbb{R}$ konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)^a$! $\boxed{a > \frac{1}{3}}$

(9) Razvij funkcijo $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t-1}\,dt$ v Taylorjevo vrsto okoli točke 1 in določi območje konvergence.

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}(x-1)^n$ za $|x-1| \le 1$.

(10) Izračunaj $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1+\frac{4}{3}x^2}}{2-x^2-2\cos x}$. $\boxed{-\frac{2}{3}}$

(11) Določi $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, da bo obstajala (končna) limita $L = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^5}\left(e^x - \frac{1+ax+bx^2}{1+cx+dx^2}\right)$. Izračunaj L.

$a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{12}$, $c = -\frac{1}{2}$, $d = \frac{1}{12}$ in $L = \frac{1}{720}$.