4. domača naloga

(1) Poenostavi naslednje izraze:
(a) $(3+4i)\overline{(1-3i)}$ (b) $\dfrac{7-3i}{1+i}$ (c) $(1+i\sqrt{3})^{10}$

$\boxed{\text{(a) } -9+13i \quad \text{(b) } 2-5i \quad \text{(c) } -512(1+i\sqrt{3})}$

(2) Zapiši vse vrednosti izraza $\sqrt[7]{(-\sqrt{3}-i)^5}$ in jih nariši.

$$\boxed{\sqrt[7]{32}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{2k\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{2k\pi}{7}\right)\right),\ k=0,1,\ldots,6}$$

(3) Skiciraj naslednje podmnožice kompleksnih števil.
(a) $\{z\in\mathbb{C}\,;\,2(\operatorname{Re}z)^2+\operatorname{Im}z<1\}$ (b) $\{z\in\mathbb{C}\,;\,\operatorname{Re}z^2+4\operatorname{Im}z=0\}$

(a) točke, ki ležijo pod parabolo $y=1-2x^2$
(b) hiperbola $(y-2)^2-x^2=4$

(4) Naj bo $k\neq 0$ realno število. Za katere k je $1+ik$ bliže izhodišču kot $1-\frac{i}{k}$?

$\boxed{|k|<1}$

(5) Pokaži, da je množica kompleksnih števil $\left\{z=\dfrac{3}{2+\cos\varphi+i\sin\varphi}\,;\,\varphi\in\mathbb{R}\right\}$ podmnožica krožnice s središčem $a=2$ in polmerom 1.

(6) Izračunaj množice kompleksnih števil z, ki zadoščajo (ne)enačbam. Množice rešitev nariši.
(a) $z^3=-2+2i$ (b) $z^8+z^4-12=0$ (c) $\sqrt{|z|^2-2}+\operatorname{Im}z>\operatorname{Re}z$

(a) $z=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right)$, $k=0,1,2$
(b) $z=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)\right)$, $k=0,1,2,3$, oziroma $z=\pm1\pm i$,
$z=\sqrt[4]{3}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{4}\right)\right)$, $k=0,1,2,3$, oziroma $z=\pm\sqrt[4]{3},\ \pm i\sqrt[4]{3}$
(c) $\{z=x+iy; x<y, x^2+y^2\geq 2 \text{ ali } y\leq x, 1<xy\}$

(7) Pokaži, da sta množici kompleksnih števil A in B enaki.

$$A=\left\{z\in\mathbb{C};\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}\leq 2\right\}\qquad B=\left\{z\in\mathbb{C};\left|z-\frac{1}{2}\right|\geq\frac{1}{2}\right\}.$$

(8) Zapiši x^5-1 kot produkt realnih polinomov stopnje največ dve.

(9) Z uporabo Moivrove formule izrazi $\cos 4\varphi$ in $\sin 4\varphi$ s pomočjo $\cos\varphi$ in $\sin\varphi$.

(10) Naj bo $a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Poišči vse rešitve enačbe

$$z^7+z^5a+z^3a^2+za^3=0$$

v polarni obliki.

$$\boxed{z=0, z=\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{4}\right)\right),\ k=1,2,3,5,6,7}$$

(11) Poišči vsa kompleksna števila z, ki izpolnjujejo enačbi

$$\begin{aligned}|z|^2+(2+i)z+(2-i)\bar{z}+4 &= 0,\\ (1-i)z+(1+i)\bar{z}+4 &= 0.\end{aligned}$$

$\boxed{z=-2, z=-3+i}$

(12) Poišči vsa kompleksna števila z, ki ustrezajo pogojema

$$z^2+\bar{z}+1=0,\quad \operatorname{Im}(z^2)\geq 1.$$

$\boxed{z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i}$

(13)* Čim bolj natančno nariši množico točk v kompleksni ravnini, ki jo določa sistem neenačb:

$$4\left|\operatorname{Re}(z-1)\right| > \left|\operatorname{Im} z\right|, \quad \operatorname{Re}(z^2) > \operatorname{Im}(z^2)\,.$$

(14) Naj bodo z, w in t kompleksna števila. Pokaži, da velja

$$z\operatorname{Im}(\bar{w}t) + w\operatorname{Im}(\bar{t}z) + t\operatorname{Im}(\bar{z}w) = 0\,.$$

(Nasvet: $\operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.)

(15) Naj bo $z = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$. Označimo $a = z + z^4$ in $b = z^2 + z^3$. Pokaži:
(a) $a + b = -1$ in $ab = -1$.
(b) z je rešitev enačbe $w^{16} + w^9 + w^4 + w + 1 = \sqrt{5}$.

(16) Poišči vsa kompleksna števila z in w, ki zadoščajo enačbam

$$z + w = 3 + 4i, \quad |z| = 2, \quad |w| = 3\,.$$

(Nasvet: Trikotniška neenakost.)

$\boxed{z = \frac{2}{5}(3+4i),\ w = \frac{3}{5}(3+4i)}$

(17)* Naj bosta z, w neničelni kompleksni števili, za kateri je $\dfrac{(z+w)^2}{zw}$ realno število. Pokaži, da točke 0, z in w ležijo na isti premici ali pa so oglišča enakokrakega trikotnika.

(18)* Naj bo $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Pokaži, da je $\left(1 + \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}\right)^n$ imaginarno število.
(Nasvet: Izračunaj argument.)

(19) Poišči vsa kompleksna števila z, za katera je $\left(\dfrac{z-i-1}{iz+1}\right)^2$ realno število.

$\boxed{\{z = x + iy\,;\ (x-\frac{1}{2})^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}, x \neq 0\} \cup \{z = x + i\,;\ x \neq 0\}}$

(20) Naj bosta z, w kompleksni števili. Pokaži:
(a) Če je $|z| = 1$ in $|w| \neq 1$, potem je $\left|\dfrac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| = 1$.
(b) Paralelogramska enakost: $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.
(c) $|1-\bar{z}w|^2 - |z-w|^2 = (1+|zw|)^2 - (|z|+|w|)^2$.
(d) Če velja $\operatorname{Re} z, \operatorname{Re} w > 0$, potem je $\left|\dfrac{z-w}{\bar{z}+w}\right| < 1$.

(21) Dokaži, da imata intervala $(0,1)$ in $[0,1)$ isto moč.