Analiza 1

5. domača naloga

(1) Naj bo $a_n = \dfrac{2}{3n+7}$. Napiši nekaj členov zaporedja a_n. Ugotovi, ali je zaporedje navzgor omejeno, navzdol omejeno, naraščajoče, padajoče in, ali je konvergentno. Če konvergira, izračunaj limito.

Zaporedje je padajoče, limita je 0.

(2) Po definiciji dokaži, da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}.$$

(3) Naj bo $a_1 = 1$ in naj za vsako naravno število n velja

$$a_{n+1} = \frac{1}{6}(a_n^2 + a_n + 6).$$

Pokaži, da je zaporedje a_n naraščajoče in navzgor omejeno. Utemelji, da je konvergentno in izračunaj limito. Kaj pa če vzamemo drug začetni člen $a_1 > 0$?

Če je $a_1 = 1$, je limita enaka 2. Če je $a_1 > 3$, potem zaporedje divergira.
Če je $a_1 = 3$, potem konvergira k 3. Sicer zaporedje konvergira k 2.

(4) Naj bo $x_1 = 3$ in za $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} = 3 + \frac{4}{3 + \frac{4}{x_n}}.$$

Pokaži, da je zaporedje x_n monotono in omejeno (pomagaj si s kandidatom za limito). Utemelji, da je konvergentno in določi limito.

Zaporedje je naraščajoče in konvergira proti 4.

(5) Zaporedje a_n je podano z začetnim členom $a_1 = 5$ in rekurzivno zvezo $a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3}$. Dokaži, da je zaporedje a_n konvergentno in izračunaj limito.

Zaporedje je padajoče in konvergira proti 3.

(6)* Zaporedje a_n je podano z začetnim členom $a_1 = 3$ in rekurzivno zvezo $a_{n+1} = 5 - 4a_n + a_n^2$. Če zaporedje konvergira, poišči limito, sicer pa poišči njegova stekališča. Enako za $a_1 = 2.1$.

V obeh primerih sta stekališči 1 in 2.

(7) Naj bosta $a, b > 0$. Zaporedji a_n in b_n sta podani z relacijami $a_1 = a$, $b_1 = b$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ in $b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$. Pokaži, da velja $a_n \le b_n$, $n > 1$, da je zaporedje a_n naraščajoče ter zaporedje b_n padajoče in velja $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. To skupno limito imenujemo *aritmetično-geometrična sredina* števil a in b.

(8) Zaporedje je podano s splošnim členom $a_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}$, kjer je $a \ge 0$. Ugotovi, ali je konvergentno. Če je, izračunaj limito.

Zaporedje konvergira proti $\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$.

(9) Izračunaj limito zaporedja, podanega z $a_1 = 1,\ a_2 = b$ in $a_{n+2} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}a_{n+1}$.

Limita je $\frac{1+3b}{4}$.

(10)* Pokaži, da je zaporedje

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{\sqrt[2]{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[n]{2n}}$$

divergentno.

(11)* Naj bo a_n konvergentno zaporedje z limito a in $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injektivna preslikava. Za $n \in \mathbb{N}$ definirajmo $b_n = a_{\sigma(n)}$. Dokaži, da tudi zaporedje b_n konvergira k a. Poišči primer konvergentnega zaporedja a_n in preslikave $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ki ni injektivna in za katero zaporedje b_n ni konvergentno.