Analiza 1

9. domača naloga

(1) Ugotovi, za katera realna števila $a > 0$ vrsta konvergira in za katera konvergira absolutno.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)a^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{n^2}}{n!}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^a}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$

(a) Absolutno konvergira za $a > 1$, pogojno konvergira za $a = 1$, sicer divergira.
(b) Absolutno konvergira za $a \leq 1$, sicer divergira.
(c) Absolutno konvergira za $a > 1$, sicer divergira.
(d) Absolutno konvergira za $a > 1$, sicer pogojno konvergira.
(e) Absolutno konvergira za vsak a.

(2) Za katere $a, b \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$, je konvergenta vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{b^n + n}$ in za katere a, b je absolutno konvergentna?

Absolutno konvergira natanko takrat, kadar je bodisi $b \leq 1$ in $|a| < 1$ bodisi $b > 1$ in $|a| < b$.
Pogojno konvergira za $b \leq 1$ in $a = -1$.

(3) Dokaži: če je vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna, je tudi vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} a_n$ absolutno konvergentna.

(4) Naj bosta konvergentni vrsti $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ in $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$. Dokaži, da so potem absolutno konvergentne tudi vrste: (a)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)^2$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$.

(5)* Z upoštevanjem $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ poišči vsoto spodnje vrste, ki jo dobimo z zamenjavo vrstnega reda členov dane vrste: $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \cdots$.

$\boxed{\frac{1}{2}\ln 2}$