Vaje iz Analize 1
Funkcije

(1) Določi definicijska območja naslednjih funkcij
(a) $\sqrt{9-x^2}$ (b) $\ln \arcsin \dfrac{x+2}{5-x}$

(2) Za naslednje pare funkcij ugotovi, ali so identični
(a) $f(x) = \frac{x}{x}$, $g(x) = 1$
(b) $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$
(c) $f(x) = \ln x^2$, $g(x) = 2\ln x$.

(3) Katere od naslednjih funkcij so identične

$$f(x) = x,\ g(x) = \ln e^x,\ h(x) = e^{\ln x}.$$

(4) Naj bo

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & x \geq 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & |x| \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Določi $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ in $g \circ g$ in nariši grafe.

(5) Naj bo $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Izračunaj $f_n(x) = (\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n})(x)$ za $n \in \mathbb{N}$.

(6) Funkcija f je podana s predpisom $f(x+1) = x^3 - 5x + 4$. Izračunaj $f(3)$ in $f(x-1)$.

(7) Nariši grafa funkcij $\sin(\arcsin x)$ in $\arcsin(\sin x)$.

(8) Dokaži enakost

$$\arccos x = \begin{cases} \arcsin \sqrt{1-x^2}, & x \in [0,1], \\ \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}, & x \in [-1,0]. \end{cases}$$

(9) Naj bo $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+1}$. Določi definicijsko območje D_f funkcije f. Pokaži, da je f injektivna na D_f in določi inverzno funkcijo. Nalogo reši računsko in grafično. Podobno obravnavaj še funkcijo $g(x) = \arcsin \dfrac{x-3}{2}$.

(10) Za naravno število $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ naj bo $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.
(a) Izračunaj definicijska območja D_{T_n}.
(b) Poenostavi T_0 in T_1.
(c) Dokaži, da je T_n polinom stopnje n.
(d) Obravnavaj sodost oziroma lihost polinomov T_n in določi njihove vodilne koeficiente.

(11) Funkciji *sinus hiperbolikus* in *cosinus hiperbolikus* sta definirani s predpisoma

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Pokaži, da je sh injektivna na $\mathbb{R}$ in izračunaj inverzno funkcijo. Imenujemo jo *area sinus hiperbolikus* in označimo arsh. Pokaži, da je zožitev ch na $[0, \infty)$ injektivna in izračunaj inverzno funkcijo zožitve. Imenujemo jo *area cosinus hiperbolikus* in označimo arch. Izpelji še adicijska izreka

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x, \qquad \operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

(12) Dokaži, da lahko vsako funkcijo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ enolično zapišemo kot vsoto sode in lihe funkcije. Kaj dobimo v primeru $f(x) = e^x$?

(13) Definirajmo funkcijo $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom $f_a(x) = |x+a| + |x|$, kjer je $a \in \mathbb{R}$.
(a) Ali je funkcija f_a injektivna za kak a?
(b) Ali je funkcija f_a surjektivna za kak a?
(c) Ali je zožitev $f_a|_{[0,\infty)}$ injektivna za kak a?
(d) Ali je funkcija $f_a\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ bijektivna za kak a?

(14) Dani sta preslikavi $f\colon A \to B$ in $g\colon B \to C$. Dokaži naslednje trditve.

(a) Če sta f in g injektivni, je $g \circ f$ injektivna.

(b) Če sta preslikavi f in g surjektivni, je $g \circ f$ surjektivna.

(c) Če je $g \circ f$ injektivna, je f injektivna.

(d) Če je $g \circ f$ surjektivna, je g surjektivna.

(e) f je injektivna natanko takrat, kadar obstaja preslikava $h\colon B \to A$, za katero je $h \circ f = \mathrm{id}_A$. Preslikavi h pravimo *levi inverz* preslikave f.

(f) g je surjektivna natanko takrat, kadar obstaja preslikava $h\colon C \to B$, za katero je $g \circ h = \mathrm{id}_C$. Preslikavi h pravimo *desni inverz* preslikave g.

(15) Poišči primer preslikav $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da je g surjektivna, $g \circ f$ pa ni, in primer, da je f injektivna, $g \circ f$ pa ni.

(16) Naj bo $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in definirajmo funkcijo $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(n) = an - [an]$. Dokaži, da velja:

(a) f je injektivna,

(b) $f(\mathbb{N}) \subset (0,1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$,

(c) če je $x, y \in f(\mathbb{N})$ in $x + y < 1$, potem je $x + y \in f(\mathbb{N})$.

(17) Pokaži, da obstaja natanko ena neničelna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za katero velja

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ in } f(xy) = f(x)f(y) \text{ za vse } x, y \in \mathbb{R}.$$

Ugani njen predpis.