

VAJE IZ ANALIZE 1
Funkcijske vrste

(1) Določi limitno funkcijo in ugotovi, ali funkcijsko zaporedje konvergira enakomerno na \mathbb{R} .

(a) $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ (b) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ (c) $f_n(x) = 2xn^2e^{-n^2x^2}$

(2) Dana je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{x^2+n}$. Dokaži, da konvergira enakomerno na \mathbb{R} .

(3) Dokaži, da je vsota vrste $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{nx}}$ zvezna funkcija na $(0, \infty)$.

(4) Naj bo $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{10^n}$. Dokaži, da je funkcija f definirana, zvezna in omejena na \mathbb{R} . Izračunaj $f(0)$ in $f(\frac{\pi}{2})$.

(5) Naj bo $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^n)$. Dokaži, da je f definirana na $[0, 1]$ in poenostavi njen predpis. Ali je konvergenca funkcijske vrste enakomerna na $[0, 1]$?

(6) Funkcijsko zaporedje $f_n: [a, b] \rightarrow [c, d]$ enakomerno konvergira na $[a, b]$ proti funkciji f . Naj bo $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna. Dokaži, da funkcijsko zaporedje $g \circ f_n$ enakomerno konvergira na $[a, b]$ in določi njegovo limitno funkcijo.

(7) Določi konvergenčna območja naslednjih potenčnih vrst.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^{n!}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^{n-1}n^n}$

(8) Določi konvergenčno območje potenčne vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n} (x-1)^n$ in jo seštej.

(9) Razvij naslednje funkcije v Taylorjevo vrsto okrog točke $x = a$. Določi konvergenčni polmer.

(a) $4x^3 - 10x^2 + 9x - 2, a = 1$ (b) $\frac{x}{x-2}, a = 5$ (c) $\frac{1}{x^2 - 5x + 6}, a = 1$ (d) $\frac{1}{x^5}, a = 1$
(e) $\sin x, a = \frac{\pi}{4}$ (f) $\sin^2 x \cos x, a = 0$ (g) $(1 + 3x) \ln(1 + x), a = 0$

(10) Določi Taylorjevo vrsto za funkcijo \arctg okrog 0 in izračunaj $\arctg^{(n)}(0)$.

(11) Funkcijo cosinus aproksimiramo s polinomom $p(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ na intervalu $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Oцени napako pri aproksimaciji!

(12) Izračunaj naslednje limite s pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin x - \sin(ax)}{x^2 \sin x}$
(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$ (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{x^3}{1 + \frac{1}{x}} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)$

(13) Seštej naslednje številске vrste.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(n+1)!}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$