

VAJE IZ ANALIZE 1
Integral

(1) Izračunaj naslednje integrale

(a) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}} dx$

(b) $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$

(c) $\int 2^x 3^{x-2} dx$

(d) $\int \operatorname{tg}^4 x dx$

(e) $\int \frac{1}{\operatorname{ch} x} dx$

(f) $\int \frac{1}{\sin x} dx$

(g) $\int \frac{1}{1-\cos x} dx$

(h) $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$

(i) $\int \operatorname{th}^3 x dx$

(j) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$

(k) $\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x) dx$

(l) $\int e^{ax} \cos bx dx$

(m) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$

(n) $\int x^t \ln x dx$

(o) $\int \frac{x^2}{(x-1)^{100}} dx$

(p) $\int \frac{x}{1+x^4} dx$

(q) $\int \frac{1}{9+4x^2} dx$

(r) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$

(2) Izračunaj integrale racionalnih funkcij

(a) $\int \frac{x^4}{(x+2)^2} dx$

(b) $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+3} dx$

(c) $\int \frac{x^5}{x^6+9x^3+8} dx$

(d) $\int \frac{2x+3}{x^3(x+1)^2} dx$

(e) $\int \frac{1}{x^3+1} dx$

(f) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$

(g) $\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2} dx$

(h) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx$

(3) Izračunaj integrale korenskih funkcij

(a) $\int \frac{1}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x})^2} dx$

(b) $\int \frac{2+\sqrt{x+1}}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}} dx$

(c) $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{(1+x)^4}} dx$

(d) $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}} dx$

(e) $\int \frac{x^2+3x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

(f) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-2x^2}} dx$

(g) $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} dx$

(4) Izračunaj integrale trigonometričnih funkcij

(a) $\int \frac{1}{1+\sin^2 x} dx$

(b) $\int \cos^5 x dx$

(c) $\int \sin^{10} x \cos^3 x dx$

(d) $\int \frac{1}{2\sin^2 x + 5\cos^2 x} dx$

(e) $\int \cos^4 x \sin^2 x dx$

(f) $\int \sin 6x \cos 13x dx$

(g) $\int x^2 \sin x dx$

(h) $\int \arccos \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$

(i) $\int \arcsin^3 x dx$

(5) Izračunaj integrale eksponentnih in logaritemskih funkcij

(a) $\int x^2 e^{3x} dx$ (b) $\int \ln^2 x dx$ (c) $\int \ln(\ln x) dx$ (d) $\int x^m \ln^n x dx$

(6) Po definiciji izračunaj $\int_1^3 x^2 dx$.

(7) Za pozitiven s izračunaj limito

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^s + 2^s + \dots + n^s}{n^{s+1}}.$$

(8) Naj bo $f: [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ zvezna funkcija. Poenostavi izraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) f\left(\frac{2}{n}\right) \dots f\left(\frac{n}{n}\right)}.$$

(9) Naj bo $0 < a < b$ in $f: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ zvezna funkcija. Definirajmo funkciji F in G s predpisoma

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad G(x) = \int_a^x tf(t) dt.$$

Dokaži, da je funkcija $\frac{F}{G}$ definirana in padajoča na intervalu (a, b) .

(10) (a) Naj bo $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Pokaži naslednjo enakost

$$\int_0^\pi xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx.$$

(b) Izračunaj

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

(11) Izračunaj $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos(nx) dx$ za naravna števila n .

(12) Izračunaj $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ za $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. S pomočjo tega rezultata izpelji oceno za π .

(13) Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujejo krivulje $y = (x + 1)^2$, $x = \sin \pi y$ in $y = 0$.

(14) Lik L omejujeta parabola $y = 4 - x^2$ in abscisna os. Izračunaj prostornino telesa, ki ga dobimo z vrtenjem lika L okrog osi $x = 3$.

(15) Izračunaj prostornino telesa, ki je navzdol omejeno z ravnino $z = 0$, njegova projekcija na ravnino $z = 0$ je notranjost elipse $9x^2 + y^2 \leq 16$ in preseki z ravninami $x = c$ so kvadrati.

(16) (a) Dokaži, da za vsak $x > e$ velja ocena $1 < \ln x < \frac{x}{e}$.

(b) Oцени integral

$$\int_3^4 \frac{1}{\sqrt[3]{\ln x}} dx.$$

(17) Za vsakega od spodnjih integralov ugotovi, ali obstaja. Če obstaja, ga izračunaj.

$$(a) \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} dx \quad (b) \int_0^1 \ln x dx \quad (c) \int_0^\infty x^\alpha dx$$

$$(d) \int_0^\infty \frac{9x}{x^3 - 3x + 2} dx \quad (e) \int_2^\infty \frac{9x}{x^3 - 3x + 2} dx$$

(18) Za vsakega od spodnjih integralov ugotovi, ali obstaja.

$$(a) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} dx, \text{ kjer je } k \in [0, 1], \quad (b) \int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx,$$

$$(c) \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} dx, \quad (d) \int_{-1}^\infty \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^7}} dx,$$

$$(e) \int_e^\infty \frac{1}{x \ln^p x} dx, \quad (f) \int_0^\infty \frac{1}{x^a + x^b} dx, \text{ kjer je } 0 < a < b,$$

$$(g) \int_a^\infty \frac{1}{(x^2 - a)^{2a}} dx, \text{ kjer je } a > 0, \quad (h) \int_0^\infty \frac{\ln x}{3 + 2x^2} dx.$$

(19) Izračunaj dolžino grafa $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$ nad intervalom $[1, e]$.

(20) Izračunaj ploščino lemniskate. Lemniskata je podana v polarnih koordinatah z enačbo $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, kjer je $a > 0$.

(21) Izračunaj ploščino zanke Descartesovega lista. Descartesov list je podan parametrično z enačbama $x(t) = \frac{3at}{1+t^3}$ in $y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3}$, kjer je $a > 0$.

(22) Izračunaj obseg in ploščino kardioide. Kardioida je podana v polarnih koordinatah z enačbo $r = a(1 + \cos \varphi)$, kjer je $a > 0$.

(23) Izračunaj ploščino lika med kardioido $r = 1 + \cos \varphi$ in krožnico $r = \frac{3}{2}$, ki leži zunaj kroga.

(24) Izračunaj obseg in ploščino astroide. Astroida je podana implicitno z enačbo $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$.

(25) Krivulja je podana parametrično z enačbama

$$x(t) = \int_1^t \frac{\sin u}{u^2} du, \quad y(t) = \int_1^t \frac{\cos u}{u^2} du.$$

Izračunaj dolžino poti od točke $x = 0$ do točke, v kateri je tangenta prvič navpična.

(26) Graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ nad intervalom $[1, \infty)$ zavrtimo okrog abscisne osi. Izračunaj prostornino in površino tako dobljene vrtenine.

(27) Kardioido z enačbo $r = 1 + \cos \varphi$ zavrtimo okrog abscisne osi. Izračunaj površino vrtenine.

(28) Naj bo

$$T_a = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq \frac{\operatorname{arctg} z}{(1 + z^2)^a} \right\}.$$

(a) Za katere $a > 0$ je prostornina T_a končna? Nasvet: premisli, da je T_a vrtenina.

(b) Izračunaj prostornino T_1 .