Vaje iz Analize 1

Metrični prostori

(1) V množico $M = (0,\infty) \times (0,\infty)$ vpeljemo d s pravilom

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \left|\ln\frac{x_2}{x_1}\right| + \left|\ln\frac{y_2}{y_1}\right|.$$

a) Dokaži, da je d metrika na množici M.
b) Skiciraj odprto kroglo $K((1,1),1)$.

(2) Določi točke v ravnini, ki so v metrikah d_1, d_2 in d_∞ najbližje premici z enačbo $y = 2x+1$.

(3) V ravnino $\mathbb{R}^2$ s koordinatnim izhodiščem $O(0,0)$ vpeljemo *poštarsko metriko* d s pravilom

$$d(T_1,T_2) = \begin{cases} d_2(T_1,T_2), & \text{točki } T_1 \text{ in } T_2 \text{ sta na istem poltraku z začetkom v } O, \\ d_2(T_1,O)+d_2(O,T_2), & \text{sicer.} \end{cases}$$

a) Dokaži, da je d res metrika.
b) Skiciraj krogli $K((1,1),1)$ in $K((1,1),2)$.

(4) Za $x = (x_1,x_2,\ldots)$ in $y = (y_1,y_2,\ldots)$ iz množice realnih zaporedij $M = \mathbb{R}^\infty$ definiramo d s pravilom

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ \frac{1}{n}, & x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_{n-1} = y_{n-1}, x_n \neq y_n. \end{cases}$$

a) Dokaži, da je d res metrika.
b) Določi odprto kroglo $K(0,r)$ in zaprto kroglo $\overline{K}(0,r)$ za $r = \frac{1}{5}, \sqrt{2}$.
c) Dokaži, da je vsaka točka iz krogle $K(a,r)$ lahko središče te krogle.

(5) Dana je funkcija $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$q(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin, \mathbb{Q} \end{cases}$$

in predpis

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & q(x) = q(y), \\ |x-y|+1, & q(x) \neq q(y). \end{cases}$$

Dokaži, da je d metrika na množici $\mathbb{R}$ in določi kroglo $K(0,\frac{3}{2})$.

(6) Naj bo $a > e > 0$. V metriki d_1 skiciraj 'elipso' z goriščema $F_1(-e,0)$ in $F_2(e,0)$ ter polosjo a.

(7) Ugotovi ali je A odprta oz. zaprta podmnožica danega metričnega prostora (M,d).
a) $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$
b) $A = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$
c) $A = \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$
d) $A = \{(x,y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$
e) $A = \{(x,y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$
f) $A = \{(x,y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 < 1\,,\ y \geq 1\} \subset \mathbb{R}^2$
g) $A = \{(x,y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 < 1\,,\ y < 1\} \subset \mathbb{R}^2$
h) $A = K(\sin,\frac{1}{2}) \subset (C[0,1],d_\infty)$
i) $A = \mathbb{R}[x] \subset (C[0,1],d_\infty)$
j) $A = \{f \in C[0,1] \mid f(0) > 0\} \subset (C[0,1],d_\infty)$

(8) Ugotovi ali je množica A kompaktna v evklidski metriki.
a) $A = \mathbb{R} \times [0,1] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
b) $A = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
c) $A = \Gamma(f) = \{(x,f(x)) \mid x \in D_f\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, kjer je f zvezna in $D_f = \mathbb{R}$
d) $A = \Gamma(f) = \{(x,f(x)) \mid x \in D_f\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, kjer je f zvezna in $D_f = [0,1]$
e) $A = \Gamma(f) = \{(x,f(x)) \mid x \in D_f\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, kjer f ni zvezna in je $D_f = [0,1]$
f) $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$

(9) Naj bo $a \in [0,1]$. *Evalvacijo* $A\colon C[0,1] \to \mathbb{R}$ definiramo s predpisom

$$A(f) = f(a).$$

Obravnavaj zveznost evalvacije, če na prostoru $C[0,1]$ izberemo metriko d_∞ ali metriko d_1.

(10) Preslikavo $F\colon [0,1] \to C[0,1]$ definiramo s predpisom

$$F(t)(x) = x^t.$$

Obravnavaj zveznost preslikave F, če na prostoru $C[0,1]$ izberemo metriko d_∞ ali metriko d_1.

(11) Za $x = (x_1, x_2, \ldots)$ in $y = (y_1, y_2, \ldots)$ iz množice realnih zaporedij $M = \mathbb{R}^\infty$ definiramo metriko d s pravilom

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ \frac{1}{n}, & x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_{n-1} = y_{n-1}, x_n \neq y_n. \end{cases}$$

a) Dokaži, da je (M, d) poln metrični prostor.
b) Ali je podmnožica $N = \{x \in M \mid \text{zaporedje } x \text{ ima končno mnogo neničelnih členov}\}$ poln metrični prostor?

(12) a) Naj bo $A \subset \mathbb{R}$ zaprt interval in $f\colon A \to A$ funkcija, ki je odvedljiva v notranjosti A. Denimo, da obstaja tako število $q < 1$, da za vsak $x \in \operatorname{Int} A$ velja $|f'(x)| \leq q$. Dokaži, da ima f natanko eno negibno točko na intervalu A.
b) Naj bo $f(x) = x + e^{-x}$. Dokaži, da je $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ taka funkcija, da za $x \in (0,\infty)$ velja $|f'(x)| < 1$, funkcija f pa nima negibnih točk.

(13) Dokaži, da obstaja natanko ena funkcija $f \in C[0,1]$, ki zadošča enačbi

$$\int_0^1 e^{-xt} f(t)dt = 2f(x) + 1.$$