Vaje iz Analize 1

Odvod

(1) Izračunaj odvod funkcije $y = f(x)$, kjer je f dana s spodnjim predpisom.

(a) $e^{-\cos x}$ (b) $x^n \ln\left(\dfrac{x}{1+\sqrt{x}}\right)$ (c) $\dfrac{2^{3x}}{3^{x^2}}$

(d) $\dfrac{1-\ln^2 x}{\ln 3 + \ln^3 x}$ (e) $\ln(\ln(\ln x))$ (f) $(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

(2) (a) Izračunaj odvode hiperboličnih funkcij.
(b) Izpelji formulo za $\operatorname{arsh} x$ in izračunaj odvod funkcije arsh na dva načina (kot odvod inverzne funkcije in iz dobljene formule). Enako naredi še za arch in arth.

(3) Zapiši enačbo tangente na elipso $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ v točki $(1, b)$, kjer je $b > 0$.

(4) Poišči enačbo tiste tangente na graf funkcije $f(x) = 2 + x - x^2$, ki je vzporedna premici $y = \sqrt{3} - 3x$.

(5) Poišči enačbo normale na graf funkcije $y = \sqrt{\ln x}$ v $x = e$.

(6) Dokaži, da je dolžina odseka tangente na astroido med koordinatnima osema konstantna. Astroida je krivulja, ki zadošča enačbi $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, kjer je $a > 0$.

(7) Pod kakšnim kotom se sekata grafa funkcij sin in cos?

(8) Funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je zvezna v 0, odvedljiva v 0 in za vsaka $x, y \in \mathbb{R}$ velja $f(x+y) = 2f(x)f(y)$. Dokaži, da je f zvezno odvedljiva na $\mathbb{R}$.

(9) S pomočjo diferenciala izračunaj približno vrednost izraza $\sin \dfrac{2\pi}{9}$

(10) Pokaži, da se funkciji $f(x) = \operatorname{arctg} x$ in $g(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$ na vsakem intervalu, kjer sta obe zvezni, razlikujeta za konstanto. Izračunaj $f - g$.

(11) Naj bo funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1, \\ ax + b, & -1 \leq x < 1, \\ 4 \operatorname{arctg} x + c, & x < -1, \end{cases}$$

kjer so a, b, c neka realna števila.
(a) Določi a, b, c tako, da bo f zvezno odvedljiva na $\mathbb{R}$.
(b) Pokaži, da obstaja inverzna funkcija f^{-1}.
(c) Izračunaj zalogo vrednosti $f(\mathbb{R})$.

(12) Poišči globalne ekstreme funkcije $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$ na intervalu $[0, 2]$.

(13) V enakokrak trikotnik z osnovnico c in višino h včrtaj pravokotnik, ki ima osnovnico vzporedno c in ima največjo možno ploščino.

(14) Cena enote površine valjastega dela silosa je za faktor $\alpha > 1$ nižja od cene enote površine sferne kupole. Pri danem volumnu določi dimenzije najcenejšega silosa.

(15) Naj bosta $a, p > 0$. Na paraboli $y^2 = 2px$ poišči točko, ki je najbližja točki $(a, 0)$.

(16) Kolikšna je dolžina najdaljše palice, ki jo lahko nesemo (vzporedno tlem), skozi hodnik s pravokotnim ovinkom, če je širina hodnika pred ovinkom enaka a, po ovinku pa b.

(17) Dokaži, da za vsaka $x, y \in \mathbb{R}$ velja

$$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq |x - y| \,.$$

Ali je funkcija arctg enakomerno zvezna na $\mathbb{R}$?

(18) Dokaži, da za vsak $a > 0$ velja

$$\frac{1}{a+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) < \frac{1}{a} \,.$$

(19) Naj bo f zvezna na $[0, 1]$ in odvedljiva na $(0, 1)$. Naj velja še $f(0) = 0$ in $|f'(x)| \leq |f(x)|$ za vsak $x \in (0, 1)$. Pokaži, da je f identično enaka nič.

(20) Naj bo f zvezna na $[1,2]$ in odvedljiva na $(1,2)$ in naj velja $f(2)=2f(1)$. Dokaži, da za nek $a \in (1,2)$ velja $f'(a) = \dfrac{f(a)}{a}$.

(21) Naj bo f $(n-1)$-krat zvezno odvedljiva na $[a,b]$ in naj obstaja n-ti odvod funkcije f na (a,b). Dokaži: če za neke točke $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ velja $f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n)$, potem je $f^{(n)}(c) = 0$ za nek $c \in (a,b)$.

(22) Pokaži, da ima $f(x) = 3x + \sin(2x)$ inverzno funkcijo in izračunaj $(f^{-1})'(3\pi)$.

(23) Naj bo funkcija f odvedljiva na intervalu I. Dokaži, da je f enakomerno zvezna na I, če je njen odvod omejena funkcija na I.

(24) Izračunaj naslednje limite.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{\sin(\pi x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^3 e^{2x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x-\sin x}{3x+\cos x}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right)$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{2x+1}$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-\cos x)}{\ln(1-e^{-x^2})}$

(25) Nariši graf funkcije f: določi definicijsko območje, ničle, limite na robu definicijskega območja in asimptote, intervale naraščanja in padanja, ekstreme. Če je smiselno, določi tudi intervale konveksnosti in konkavnosti ter prevoje. Natančno opiši obnašanje v bližini 'zanimivih' točk.

(a) $f(x) = \dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$ (b) $f(x) = (2x^2-17)\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

(c) $f(x) = \sin x + \cos^2 x$ (d) $f(x) = (1+x)^{1/x}$

(26) Nariši krivuljo, podano v parametrični obliki.

(a) $x(t) = \cos^2 t,\ y(t) = \sin^2 t$ (b) $x(t) = 4\cos t,\ y(t) = 3\sin t$

(27) Nariši krivuljo, podano v polarnih koordinatah. Če je mogoče, določi tudi red krivulje.

(a) $r(\varphi) = 2a\cos(3\varphi)$ (b) $r(\varphi) = a(1+\cos\varphi)$ (c) $r(\varphi) = \dfrac{a}{\varphi}$ (d) $r(\varphi) = \dfrac{\sin\varphi}{\varphi}$

(28) Skiciraj krivuljo, ki je podana v implicitni obliki.

(a) Descartesov list: $x^3 - 3axy + y^3 = 0$ (Nasvet: parameter $t = y/x$.)

(b) Lemniskata: $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ (Nasvet: polarne koordinate.)

(29) Zapiši enačbo krivulje, ki jo opiše dana točka na valju polmera b, ki se kotali po mirujočem valju polmera a. To krivuljo imenujemo *epicikloida*; pri $a = b$ dobljeno krivuljo imenujemo *kardioida* ali *srčnica*.

(30) Dana je premica p in točka A, ki ne leži na p; označimo s C pravokotno projekcijo točke A na p. Poišči enačbo krivulje, ki vsebuje vse točke M_B in N_B, dobljene na sledeči način: za poljubno točko $B \in p$ sta M_B in N_B točki na premici skozi A in B, za kateri velja $\overline{M_B B} = \overline{N_B B} = \overline{CB}$. To krivuljo imenujemo *strofoida*. Nariši jo in določi njen red.

(31) Naj bo $a > 0$. Čim bolj natančno nariši krivuljo

$$x(t) = \frac{a}{2t(1-t^2)},\ y(t) = \frac{a}{2(1-t^2)}.$$

(32) Dokaži Leibnizovo pravilo za višje odvode produkta:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

S pomočjo te formule izračunaj $(x\cos(2x))^{(100)}$.

(33) Izračunaj n-ti odvod funkcije $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x}$.

(34) Izpelji formulo za $f_n(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}$ in izračunaj $f_n(2)$.