Vaje iz Analize 1

Števila – 1. del

(1) Dokaži, da za vsa naravna števila n veljajo enakosti:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(2) Dokaži, da za vsa naravna števila n velja

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

(3) Dokaži Bernoullijevo neenakost: za vsako naravno število n in za vsako realno število $a > -1$ velja

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

(4) Dokaži, da za vsako naravno število n velja

$$n! \leq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

(5) Pokaži, da 10 deli izraz $2^{2^n} - 6$ za vsako naravno število $n \geq 2$.

(6) Pokaži, da je za vsako naravno število n izraz $13^{2n} + 6$ deljiv s 7.

(7) Dokaži, da n paroma nevzporednih premic v ravnini, od katerih se nobene tri ne sekajo v isti točki, razdeli ravnino na $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ delov.

(8) Dokaži: če je $2^n + 1$ praštevilo, potem je n oblike 2^k, kjer je k naravno število ali 0.

(9) Dokaži *binomsko formulo*: za vsaki realni števili a in b in za vsako naravno število n velja

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + nab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

(10) Dokaži, da za naravni števili m in n ter za $j \in \{0, 1, 2, \ldots, m+n\}$ velja

$$\binom{m+n}{j} = \sum_{i=0}^{j} \binom{m}{i}\binom{n}{j-i}.$$

(11) Naj bo q neničelno racionalno število, $x > 0$ in y pa iracionalni števili.
(a) Dokaži, da so števila $\sqrt{x}$, $q + x$ in qx iracionalna.
(b) Ali lahko kaj podobnega povemo o številih $x + y$, xy in $\sqrt{q}$?

(12) Naj bo n naravno število. Pokaži, da je število $\sqrt{n}$ bodisi naravno bodisi iracionalno.

(13) Pokaži, da obstajata iracionalni števili x in y, za kateri je število x^y racionalno.

(14) Dokaži, da med poljubnima različnima realnima številoma obstaja iracionalno število.

(15) Določi vsa realna števila x, za katera je izpolnjena neenakost.
(a) $\sqrt{x^2+1} + 2x - 1 > 0$ (b) $\sqrt{x^2+1} - 2x + 1 < 0$ (c) $\sqrt{x^2+1} - 2x + 1 > 0$

(16) Reši neenačbe:
(a) $|x+1| < x + 3$ (b) $|x^2 + 4x + 3| < 2$ (c) $|1 - |x-1|| < 1$