Vaje iz Analize 1
Števila – 2. del

(1) Naj bosta A in B podmnožici v $\mathbb{R}$. Vsota (razlika) množic je množica vseh vsot (razlik) elementov množic, torej $A \pm B = \{a \pm b\,;\, a \in A,\, b \in B\}$. Dokaži spodnje enakosti. Kdaj so te formule smiselne?
(a) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$ (b) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$
(c) $\inf(A-B) = \inf A - \sup B$ (d) $\sup(A-B) = \sup A - \inf B$

(2) Za naslednje množice določi supremum, infimum, minimum in maksimum, če obstajajo.
(a) $A = \{1 + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$
(b) $B = \{x \in (0,1); x$ ima v decimalnem zapisu vsaj eno enko$\}$
(c) $C_c = \{\frac{1}{1+e^{cx}}; x \geq 0\}$, kjer je $c \in \mathbb{R}$

(3) Poišči vsa kompleksna števila, ki zadoščajo enačbi
(a) $z^3 + 3z^2 + z - 5 = 0$ (b) $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}\,i$

(4) Skiciraj naslednje podmnožice kompleksnih števil. (Nalogo poskusi rešiti brez računanja.)
(a) $\{z \in \mathbb{C}; \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{7\pi}{4},\ 1 < |z| \leq 2\}$ (b) $\{z \in \mathbb{C}; |z - 2 + i| < 1\}$
(c) $\{z \in \mathbb{C}; |z-1| = |z-i|\}$ (d) $\{z \in \mathbb{C}; |z| + |z-3| = 4\}$

(5) Reši enačbi.
(a) $z^2 + 2i\mathrm{Re}\, z = |z|$ (b) $z^n = \overline{z},\ n \geq 2$

(6) Nariši množico kompleksnih števil, ki zadoščajo enačbi $|z+1| = |2z-1|$.

(7) Naj bo $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ dana s predpisom $f(z) = \frac{z^2}{z-1}$.
(a) Določi $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}\,;\, f(z) \in \mathbb{R}\}$.
(b) Določi $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}\,;\, f(z^2) = 2\}$.

(8) Dokaži, da za vsa neničelna kompleksna števila z velja

$$\left| \frac{z}{|z|} - 1 \right| \leq \arg z.$$

Nalogo poskusi rešiti geometrijsko.

(9) Naj bosta $a, b \in \mathbb{C}$. Dokaži, da ima enačba $z^2 - 2az + b = 0$ obe rešitvi na enotski krožnici natanko tedaj, kadar je $|a| \leq 1$, $|b| = 1$ in $\arg b = 2 \arg a$.

(10) Naj bo z kompleksno število, $z \neq 1$ in $|z| = 1$. Dokaži, da je število $i\frac{z+1}{z-1}$ realno.

(11) Naj bo $r > 0$ in $\varphi \in \mathbb{R}$. Seštej vsoti

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k \cos k\varphi \quad \text{in} \quad \sum_{k=0}^{n-1} r^k \sin k\varphi.$$

(12) Dokaži, da je množica sodih števil števna.

(13) Dokaži, da je množica celih števil $\mathbb{Z}$ števna.

(14) Dokaži, da je množica racionalnih števil $\mathbb{Q}$ števna.

(15) Dokaži, da imata intervala $(0,1)$ in (a,b) isto moč (kardinalnost).

(16) Ali imata intervala $(0,1)$ in $\mathbb{R}$ isto moč?

(17) Dokaži, da imata intervala $[0,1]$ in $[0,1)$ isto moč.

(18) Dokaži, da imata množici $\mathbb{R}$ in $[0,1] \cup \mathbb{N}$ isto moč.

(19) Dokaži, da je moč množice $\mathbb{N}$ strogo manjša kot moč množice $\mathbb{R}$.

(20) Dokaži, da je disjunktnih intervalov v $\mathbb{R}$ kvečjemu števno.

(21) Določi moč naslednjih množic

$$\begin{aligned} A &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)\,;\, x_j \in \{0,1\} \text{ za vse } j \in \mathbb{N}\}, \\ B &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in A\,;\, x_j \leq x_{j+1} \text{ za vse } j \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$