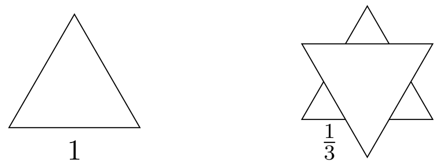
Vaje iz Analize 1
Vrste

(1) Izračunaj obseg in ploščino Kochove snežinke. Kochova snežinka je ravninski lik, ki ga dobimo z naslednjo iteracijo. Začnemo z enakostraničnim trikotnikom s stranico 1. Vsaki stranici nad srednjo tretjino prilepimo enakostranični trikotnik (kot na sliki). Postopek ponavljamo na vseh stranicah novega lika.



(2) Dokaži: če vrsta s pozitivnimi členi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, potem konvergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.
S primerom pokaži, da obratno v splošnem ni res.

(3) Naj bo x_n padajoče zaporedje pozitivnih števil.

(a) Dokaži, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira natanko takrat, kadar konvergira vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x_{2^k}$.

(b) Obravnavaj konvergenco vrst $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ in $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.

(4) Naj bo k naravno število. Z uporabo razcepa na delne ulomke seštej vrsto $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k)(n+k+1)}$.

(5) Obravnavaj konvergenco naslednjih vrst.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, kjer je $a > 0$
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$
(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n}$
(d) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$
(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3n}$
(f) $\sum_{n=1}^{\infty} n a^n$, kjer je $a > 0$
(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^n$, kjer je $a > 0$
(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s}$ kjer je $a > 0$ in $s \in \mathbb{R}$
(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(an)^n}$, kjer je $a > 0$

(6) Naj bo a_n konvergentno zaporedje pozitivnih realnih števil s pozitivno limito a. Obravnavaj konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{a_n}\right)^n, \text{ kjer je } x > 0.$$

(7) Naj bosta b, c pozitivni števili in definirajmo zaporedje a_n s predpisom

$$a_n = \frac{b(b+1)\cdots(b+n-1)}{c(c+1)\cdots(c+n-1)}.$$

(a) Obravnavaj konvergenco vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$.

(b) Naj bo $c > b$. Dokaži, da zaporedje a_n konvergira in določi njegovo limito.

(c) Izračunaj $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

(8) Obravnavaj konvergenco in absolutno konvergenco naslednjih številskih vrst

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 + \frac{1}{n})^{-n} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$
(e) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots$

(9) Obravnavaj konvergenco in absolutno konvergenco naslednjih številskih vrst v odvisnosti od $a \in \mathbb{R}$.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1-a^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)a^{2n}}$

(10) Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna vrsta in $a_n \neq -1$ za $n \in \mathbb{N}$. Dokaži, da sta vrsti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} \quad \text{in} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$$

absolutno konvergentni.