Vaje iz Analize 1

Zaporedja

(1) Naj bo $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$ za $n \in \mathbb{N}$. Dokaži, da je zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ naraščajoče in neomejeno.

(2) Naj bo $a_n = \sqrt[n]{n!}$ za $n \in \mathbb{N}$. Dokaži, da je zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ naraščajoče in neomejeno.

(3) Zaporedje je podano s splošnim členom $a_n = \frac{1000^n}{n!}$. Ugotovi, ali je konvergentno in če je, izračunaj limito.

(4) Zaporedje je podano s splošnim členom $a_n = \frac{n^5}{1,0001^n}$. Ugotovi, ali je konvergentno in če je, izračunaj limito.

(5) Po definiciji dokaži, da je limita zaporedja podanega s splošnim členom $a_n = \frac{6n - 5\cos n}{2n-1}$ enaka 3.

(6) Pokaži, da je zaporedje podano s splošnim členom $a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{4} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}$ Cauchyjevo.

(7) Naj bo $z_n = \frac{1}{n}\Big(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}\Big)$. Dokaži, da je zaporedje kompleksnih števil $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno in izračunaj limito.

(8) Naj bo $z_n = \frac{2+5ni}{n(1+i)}$. Ugotovi, ali je zaporedje $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno in če je, izračunaj limito.

(9) Fibonaccijevo zaporedje je podano z začetnima členoma $a_0 = a_1 = 1$ in rekurzivno zvezo $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ za $n \in \mathbb{N}$. Določi splošni člen zaporedja.

(10) Zaporedje je podano z začetnima členoma $a_0 = a_1 = 1$ in rekurzivno zvezo $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{4}a_{n-1}$ za $n \in \mathbb{N}$. Ugotovi, ali je zaporedje konvergentno. Določi splošni člen zaporedja.

(11) Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je podano z začetnim členom $a_1 = 1$ in rekurzivno zvezo $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{5}a_n^2$. Dokaži, da je zaporedje a_n konvergentno in izračunaj limito. Kaj pa če vzamemo drug začetni člen a_1?

(12) Zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je podano z začetnim členom $a_1 = 0$ in rekurzivnima zvezama

$$a_{2n} = \frac{1}{2}a_{2n-1}, \quad a_{2n+1} = a_{2n} + \frac{1}{2}.$$

Ugotovi, ali je konvergentno. Če je, izračunaj limito, sicer poišči stekališča.

(13) Za dano zaporedje ugotovi, ali je konvergentno in če je, izračunaj njegovo limito.

(a) $a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ korenov}}$ (b) $b_n = \underbrace{\sin(\sin(\cdots(\sin 1)\cdots))}_{n \text{ sinusov}}$.

(14) Naj bo $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ za $n \in \mathbb{N}$. Dokaži, da je zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno in izračunaj limito.

(15) (a) Naj bo zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno z limito x. Dokaži, da tudi zaporedje $(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti x. S primerom pokaži, da obratno ne velja.
(b) Naj bo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n > 0$, zaporedje z limito $x > 0$. Dokaži, da tudi zaporedje $(\sqrt[n]{x_1\cdots x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti x. S primerom pokaži, da obratno ne velja.
(c) Naj za zaporedje $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y_n > 0$, obstaja limita $\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n} = y$, $y > 0$. Pokaži, da velja $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{y_n} = y$. S primerom pokaži, da obratno ne velja.

(16) Določi vsa stekališča danega zaporedja in za vsako stekališče poišči podzaporedje, ki k temu stekališču konvergira.
(a) $a_n = (-1)^n - 1$, (b) $b_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$,

(17)* Množica racionalnih števil je števna in zato obstaja zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ za katero velja $\{a_n;\, n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$. Določi vsa stekališča danega zaporedja in za vsako stekališče poišči podzaporedje, ki k temu stekališču konvergira.

(18)* Naj bo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ omejeno zaporedje. Označimo s $\mathcal{S}$ množico stekališč zaporedja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pokaži, da ima $\mathcal{S}$ maksimum.

(19) Določi $\limsup a_n$ in $\liminf a_n$ za zaporedje s splošnim členom

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \frac{4}{n} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n}{n}.$$

(20) Izračunaj limite zaporedij:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+6n-3}{7n-3n^3+2}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^2\sqrt{n^2+1}-n^3\right)$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{2n+3}$ (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n}$ (f) $\lim\limits_{n\to\infty} n\big(\log_2(2n-1)-\log_2 n-1\big)$