Vaje iz Analize 1

Zveznost

(1) Po definiciji preveri, da je funkcija $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+2}$ zvezna v 0 in v 2.

(2) Po definiciji preveri, da je funkcija $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ zvezna, kjer je definirana.

(3) Določi konstanto k, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1}, & x \neq -1, \\ k, & x = -1, \end{cases}$$

zvezna na $\mathbb{R}$, če je mogoče.

(4) Določi konstanto k, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ k, & x = 0, \end{cases}$$

zvezna na $\mathbb{R}$, če je mogoče.

(5) Naj bo

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x, & x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ a\sin x + b, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Določi taki realni števili a in b, da bo funkcija f zvezna na $\mathbb{R}$.

(6) Funkcija f je dana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Določi vse točke, v katerih je f zvezna.

(7) Funkcija f je dana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}, \\ \dfrac{1}{n}, & x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, x = \frac{m}{n}, \text{ kjer sta si } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \text{ tuji.} \end{cases}$$

(a) Dokaži, da je f zvezna na $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}$.
(b) Dokaži, da f ni zvezna v točkah iz $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

(8) Naj bo $f\colon [0,1] \to [0,1]$ zvezna. Pokaži, da ima f negibno točko. (To je točka $x \in [0,1]$, za katero velja $f(x) = x$.)

(9) Za zvezno funkcijo $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ velja $f(2) = 1$ in

$$f(2x) = f(x)(3 - f(2x)) \text{ za vse } x \in [0,1].$$

Izračunaj $f(0)$ in dokaži, da obstaja $y \in (0,1)$, za katerega velja $f(y) = \dfrac{1}{10}$.

(10) Dokaži, da na ekvatorju obstajata diametralno nasprotni točki z isto temperaturo. V nalogi privzamemo, da ima ekvator obliko krožnice.

(11) Dokaži, da ima enačba $x2^x = 1$ rešitev na intervalu $[0,1]$. Določi jo na dve decimalki natančno.

(12) Izračunaj limite:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^m-a^m}{x-a}$, $m \in \mathbb{N}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+e^{\frac{1}{x}})^{-1}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x}$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{|x|}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$ (k) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$ (l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$

(13) Izračunaj limite:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ (e) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\ln\operatorname{ch}x)$ (f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^5+5x+1)}$

(g) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2(x+\sqrt[3]{1-x^3})$ (h) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

(14) Denimo, da obstajata limiti $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ in $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ in je druga limita pozitivna. Dokaži, da velja

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$$

(15) Izračunaj limite:

(a) $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$ (b) $\lim\limits_{x\to0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$ (c) $\lim\limits_{x\to1}x^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x}$

(16) Ugotovi, ali obstaja

$$\lim_{y\to0}y\left(\frac{y+1}{y}-\sqrt{\frac{y^2+1}{y^2}}\right).$$

(Pomagaj si z limitama funkcije $\dfrac{x+1-\sqrt{x^2+1}}{x}$ v $-\infty$ in ∞.)

(17) Dokaži, da je funkcija $x\mapsto\sqrt{x}$ enakomerno zvezna na $[0,\infty)$.

(18) Naj bo $a>0$. Obravnavaj enakomerno zveznost funkcije $x\mapsto\sin\frac{\pi}{x}$ na $(0,\infty)$, $(0,a)$ in (a,∞).