IME IN PRIIMEK: ______________________ VPISNA ŠT.: | | | | | | | | |

1. izpit iz Analize 3

31. januar 2013

(1) **[20]** Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$(3\cos x - (x+y)\sin x)dx + 3\cos x dy = 0,$$

če veš, da obstaja integrirajoči množitelj oblike $\mu(x,y) = f(x+y)$.

(2) **[25]** Naj bo $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ taka zvezna funkcija, da sta L_y in $L_{y'}$ tudi zvezni na $\mathbb{R}^3$. Naj bo $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ strogo naraščajoča funkcija. Na prostoru $\mathcal{C}^1[a,b]$ definirajmo funkcionala

$$I[y] = \int_a^b L(x,y,y')dx \qquad \text{in} \qquad J[y] = f\left(\int_a^b L(x,y,y')dx\right).$$

(a) Izračunaj šibki odvod funkcionala J. (Ni potrebno preverjati, da je to tudi krepki odvod.)

(b) Dokaži, da so ekstremale funkcionala J pri pogojih $y(a) = c$ in $y(b) = d$ natanko ekstremale funkcionala I pri pogojih $y(a) = c$ in $y(b) = d$.

(c) Določi ekstremalo funkcionala

$$J[y] = e^{\int_0^1 (y^2 - y'^2 + ye^x)dx}$$

pri pogojih $y(0) = y(1) = 0$.

(3) **[25]** Dan je sistem.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 + y^2 - 2 \\ \dot{y} &= x + y \end{aligned}$$

S pomočjo linearizacije določi fazni portret sistema v okolici stacionarnih točk. Znotraj območij, ki jih omejujejo x-kline in y-kline, določi obnašanje rešitev sistema.

(4) **[30]** Naj bo $y : [0, x_0] \to \mathbb{R}$ pozitivna ($y > 0$), strogo padajoča ($y' < 0$), konkavna ($y'' < 0$) funkcija z lastnostmi $y(0) = 1, y(x_0) = 0$, kjer je $x_0 > 0$ neko pozitivno realno število. S $P_1(x)$ označimo ploščino pod grafom y nad intervalom $[0,x]$, s $P_2(x)$ ploščino pod grafom y nad intervalom $[x, x_0]$ ter s $P_3(x)$ ploščino trikotnika omejenega z x-osjo, navpično premico skozi $(x,0)$ ter tangento na graf y v točki $(x, y(x))$. Poišči vse $x_0 > 0$ in funkcije $y(x)$ z opisanimi lastnostmi, za katere velja

$$P_1(x) + P_3(x) = P_2(x) + 3/4 \qquad \text{za vsak } x \in [0, x_0).$$