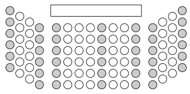
1	
2	
3	
4	
Σ	

Analiza 3: 1. izpit

30. 1. 2014

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!



Sedež (2.01)

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

Za odvedljivo funkcijo y na $\mathbb{R}$, definirajmo x_* kot presečišče normale na graf funkcije y v točki $(x, y(x))$ z abscisno osjo. Naj bo $P(x)$ ploščina lika, ki ga omejujeta graf funkcije y nad intervalom $[0, x]$ za $x > 0$ in abscisna os. Poišči vse dvakrat zvezno odvedljive funkcije y na $[0, \infty)$ in $a \in \mathbb{R}$, da bo za vse $x > 0$ veljalo

$$P(x) = x_* + a,$$

iskana funkcija pa bo zadoščala $y(1) = 3$ in $y'(1) = 1$.

Geometrijski pogoj iz naloge se glasi

$$\int_0^x y dt = x + yy' + a$$

za vse $x > 0$. Odvajajmo zgornjo enačbo. Dobimo

$$y = 1 + y'^2 + yy''.$$

Ker neodvisna spremenljivka x ne nastopa, uvedimo $z(y) = y'$. Dobimo

$$y = 1 + z^2 + yz\dot{z}.$$

Enačbo lahko preoblikujemo do

$$\dot{z}y + z = (y-1)z^{-1}.$$

Enačba je Bernoullijeva z $\alpha = -1$. Uvedimo $w = z^2$. Dobimo

$$\frac{\dot{w}y}{2} + w = y - 1.$$

Splošna rešitev zgornje enačbe je enaka $w = \frac{2}{3}y - 1 + \frac{D}{y^2}$. Torej je

$$y' = z = \sqrt{\frac{2}{3}y - 1 + \frac{D}{y^2}}.$$

Z upoštevanjem začetnih pogojev dobimo $D = 0$. Sedaj ločimo spremenljivke v zgornji enačbi, izraz preoblikujemo in dobimo

$$y = \frac{x^2 + 4x + 13}{6}.$$

Če vstavimo dobljeno funkcijo v enačbo iz naloge, dobimo $a = -\frac{13}{9}$.

2. naloga (25 točk)

Dokaži, da obstaja natanko ena dvakrat zvezno odvedljiva rešitev Cauchyjeve naloge

$$y'' = \operatorname{arctg}(xy'), \qquad y(0) = 301^{2014},\ y'(0) = 0$$

in jo določi.

Oglejmo si Cauchyevo nalogo

$$z' = \operatorname{arctg}(xz), \qquad z(x) = 0.$$

Ena od rešitev je jasno $z \equiv 0$.

Ker je $f(x,z) = \operatorname{arctg}(xz)$ lokalno Lipschitzova (zakaj), obstaja natanko ena zvezno odvedljiva funkcija na okolici točke 0, ki reši novo Cauchyjevo reši nalogo. Dokažimo, da obstaja natanko ena zvezno odvedljiva funkcija na $\mathbb{R}$, ki reši Cauchyjevo nalogo. Za vsak pravokotnik $P \subseteq \mathbb{R}^2$ velja

$$\max_P |f| \leq \sup_{(x,z)\in\mathbb{R}^2} |f(x,z)| = \frac{\pi}{2},$$

kar pomeni, da z uporabo izboljšane verzije lokalnega eksistenčnega izreka lahko vzamemo

$$c = \min\left\{a, \frac{b}{\max_P |f|}\right\} \geq \min\left\{a, \frac{2b}{\pi}\right\}.$$

Ker je f razreda C^1 povsod na $\mathbb{R}^2$, sta lahko a in b poljubna in zato lahko z zaporedno uporabo izboljšanega lokalnega eksistenčnega izreka pridemo poljubno daleč na realni osi. Torej obstaja natanko ena C^1 funkcija na realni osi, ki reši novo Cauchyjevo nalogo. Torej $z \equiv 0$, kar pomeni, da je y konstantna funkcija. Z uporabo neizkoriščenega začetnega pogoja sledi $y \equiv 301^{2014}$.

3. naloga (25 točk)

Podani so matrika

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

vektor $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ in vektorska funkcija $\vec{f}(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 12t^2 \\ -2t \end{bmatrix}$. Reši vektorsko diferencialno enačbo

$$\dot{\vec{x}} = (B\vec{x}) \times \vec{a} + \vec{f}.$$

Hitro lahko izračunamo $B\vec{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$ in $B\vec{x} \times \vec{a} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \end{bmatrix}$. Torej rešujemo sistem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2t \\ 12t^2 \\ -2t \end{bmatrix}.$$

Sistem je linearen nehomogen s konstantnimi koeficienti.

1. možnost:

Hitro vidimo, da je $x_2 = 4t^3 + D$. Če seštejemo 1. in 3. vrstico, dobimo $\dot{x}_1 + \dot{x}_3 = 0$. Odvajajmo 1. vrstico. Dobimo

$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 + \dot{x}_3 + 2 = 2 - 12t^2.$$

Odtod sledi $x_1 = t^2 - t^4 + Ct + E$. Sedaj izračunamo

$$x_3 = \dot{x}_1 - x_1 + x_2 - 2t = -t^2 + t^4 - Ct + C + D - E.$$

2. možnost:

Najprej rešimo homogeni del sistema. Matrika A ima trojno lastno vrednost 0. Hitro preverimo, da velja $A^2 = 0$. Eno izmed mnogih baz jedra matrike A tvorita vektorja $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Odtod sledi, da imamo dve Jordanski kletki, ena je velikosti 1×1, druga je velikosti 2×2. Vektor $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ je element $\ker A^2 \setminus \ker A$, z matriko A pa se preslika v vektor $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Torej je $A = PJP^{-1}$, kjer je

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Splošna rešitev homogenega delja je torej enaka

$$\vec{x} = Pe^{Jt}\vec{c} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -t \\ 1 \\ t \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nesingularna matrična rešitev homogenega dela sistema je torej enaka

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -t & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & t & 0 \end{bmatrix}.$$

Nehomogeni sistem rešujemo z variacijo konstante, tj., rešitev diferencialne enačbe iz naloge je enaka

$$\vec{x} = X \int X^{-1} \vec{f} dt,$$

kjer je

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} t & -t & t+1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tedaj je

$$X^{-1}\vec{f} = \begin{bmatrix} -12t^3 - 2t \\ 12t^2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad \int X^{-1}\vec{f} dt = \begin{bmatrix} -3t^4 - t^2 + c_1 \\ 4t^3 + c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Splošna rešitev je enaka

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -t^4 + t^2 - c_1 - c_2 t + c_3 \\ 4t^3 + c_2 + c_3 \\ t^4 - t^2 + c_1 + c_2 t \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -t \\ 1 \\ t \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t^4 + t^2 \\ 4t^3 \\ t^4 - t^2 \end{bmatrix}.$$

4. naloga

Poišči tisto ekstremalo funkcionala

$$I[y] = \int_1^2 (x^2 y'^2 + 6y^2 + 4x^2 y')dx,$$

ki zadošča $y(2) = -4$.

Euler-Lagrangejeva enačba se glasi

$$4xy' + 2x^2 y'' + 8x = \frac{d}{dx} L_{y'} = L_y = 12y.$$

Enačbo preoblikujmo do enačbe

$$x^2 y'' + 2xy' - 6y = -4x.$$

Ta enačba je nehomogena Cauchy-Eulerjeva enačba. Najprej rešimo pripadajoči homogeni del $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$ zgornje enačbe. Z nastavkom $y = x^\lambda$ dobimo $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, odkoder sledi $\lambda_1 = 2$ in $\lambda_2 = -3$. Splošna rešitev nehomogene Cauchy-Eulerjeve enačbe je torej

$$y = Ax^2 + Bx^{-3} + y_p,$$

kjer je y_p neka njena partikularna rešitev. Funkcijo y_p določimo z nastavkom $y_p = Cx$. Vstavimo v enačbo in dobimo $C = 1$. Splošna re vsitev Euler-Lagrangeeve enačbe je torej

$$y = Ax^2 + Bx^{-3} + x.$$

Iz pogoja $y(2) = -4$ dobimo

$$4A + \frac{B}{8} = -6.$$

Ker v točki 1 nimamo robnega pogoja, velja $L_{y'}(1) = 0$ oziroma $y'(1) = -2$. Odtod dobimo še enačbo $2A - 3B = -3$. Odtod sledi $B = 0$ in zato $A = -\frac{3}{2}$. Iskana ekstremala je enaka $y = -\frac{3}{2}x^2 + x$.