ANALIZA 3 - 1. kolokvij

1. 12. 2011

Ime in priimek:
Vpisna št.:

1. [25] Poišči splošno rešitev naslednje NDE

$$(1 + xy + y^3)\,dx + (2y + x^2 + xy^2)\,dy = 0,$$

če veš, da je integrirajoči množitelj oblike $\mu(x, y) = f(x + y^2)$, pri neki (gladki) funkciji $f = f(z)$.

2. [25] Poišči rešitev naslednje NDE

$$y''' = y^2 y',$$

ki zadošča pogojem $y(0) = 1, y'(0) = 1/\sqrt{6}, y''(0) = 1/3$.

3. Naj bosta $R, l > 0$. Na začetku na točki $(0, R)$ miruje motorni čoln. Nanj je z vrvjo dolžine l privezan smučar na vodi, ki miruje na točki $(0, R + l)$. V danem trenutku se začne čoln premikati v pozitivni smeri po krožnici radija R s središčem v koordinatnem izhodišču in pri tem vleči smučarja za sabo. Če pri tem vrv med smučarjem in čolnom ves čas ostane napeta (ter dolžine l), imenujemo krivuljo, po kateri potuje smučar *krožna traktrisa*. Naj bo $y = y(x)$ funkcija, čigar graf podaja začeten segment krožne traktrise.

   (a) [10] Zapiši NDE in začetni pogoj, ki jima zadošča $y = y(x)$.

   (b) [10] Iz (a) izpelji, da sta NDE in začetni pogoj za krožno traktriso v polarnih koordinatah ($r = r(\varphi)$)

$$R^2 - l^2 - r^2 = \frac{2lr\frac{dr}{d\varphi}}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}}, \quad r(0) = R + l.$$

   (c) [10] Reši NDE iz (b) za primer $R = l$.

4. [25] Naj bosta $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ in velja

$$f(x,y)x + g(x,y)y = 0, \quad \forall (x,y) \in S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}.$$

Dokaži, da ima Cauchyjeva naloga (za funkciji $x = x(t), y = y(t)$)

$$\dot{x} = f(x,y),$$

$$\dot{y} = g(x,y),$$

$$x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,$$

rešitev na celem $\mathbb{R}$, če je $x_0^2 + y_0^2 < 1$.

① $(1+xy+y^3)\,dx + (2y+x^2+xy^2)\,dy = 0 \quad (*)$

exaktnost:

$$\left[\mu(1+xy+y^3)\right]_y = \left[\mu(2y+x^2+xy^2)\right]_x$$

$$\mu_y(1+xy+y^3) + \mu(x+3y^2) = \mu_x(2y+x^2+xy^2) + \mu(2x+y^2)$$

$$\mu_y(1+xy+y^3) - \mu_x(2y+x^2+xy^2) = \mu(x-2y^2)$$

$$\mu = f(x+y^2)$$

$$f'\cdot 2y(1+xy+y^3) - f'(2y+x^2+xy^2) = \cancel{f}(x-2y^2)$$

$$f'(2y+2xy^2+2y^4-2y-x^2-xy^2) = \cancel{f}(x-2y^2)$$

$$f'(xy^2+2y^4-x^2) = \cancel{f}(x-2y^2)$$

$$-f'\cancel{(x-2y^2)}(x+y^2) = \cancel{f}\cancel{(x-2y^2)}, \quad z = x+y^2$$

$$-f' = f/z$$

$$-\frac{df}{f} = \frac{dz}{z} \rightarrow -\ln|f| = A + \ln|z| \rightarrow f = \frac{1}{z} \quad A=0$$

$$\mu = \frac{1}{x+y^2} \qquad (*)\cdot\mu$$

$$\Downarrow$$

$$dx\,\frac{1+xy+y^3}{x+y^2} + dy\,\frac{2y+x^2+xy^2}{x+y^2} = 0$$

$$\frac{dx+2y\,dy}{x+y^2} + dx\,y + dy\,x = 0$$

$$d\left(\ln|x+y^2|\right) + d(xy) = 0$$

$$\ln|x+y^2| + xy = C \rightarrow \boxed{x+y^2 = Ke^{-xy}}$$

(2)

$$y''' = y^2 y'$$

$$(y'')' = (y^3/3)' \quad / \int$$

$$y'' = y^3/3 + A \leftarrow \begin{matrix} y''(0) = 1/3 \\ y(0) = 1 \end{matrix} \Rightarrow A = 0$$

$$y'' = y^3/3 \quad , \quad y'(y) = z(y) \qquad \dot{} = \frac{d}{dy}$$

$$y'' = \frac{d}{dx} y' = \frac{dy}{dx}\frac{d}{dy} z = \dot{z} \cdot z$$

$$\dot{z} z = y^3/3$$

$$(z^2/2)^{\cdot} = y^3/3 \quad / \int dy$$

$$z^2/2 = B + \frac{y^4}{12} \qquad \cancel{z = y'}$$

$$y'^2 = 2B + y^4/6 \qquad \begin{cases} y'(0) = 1/\sqrt{6} \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow B = 0$$

$$y' = \pm\sqrt{y^4/6} = \pm \frac{y^2}{\sqrt{6}}$$

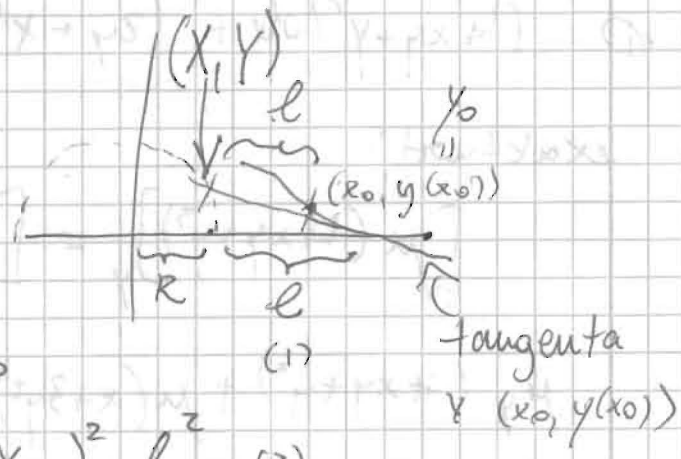
$$y' = y^2/\sqrt{6}$$

$$dy/y^2 = dx/\sqrt{6}$$

$$-1/y = C + x/\sqrt{6} \qquad \{y(0) = 1 \rightarrow C = -1$$

$$\boxed{y = \frac{1}{1 - x/\sqrt{6}}}$$

3a



(X,Y) leží na tangenti: $(X-x_0)\,y'(x_0) = Y - y_0$ (1)

$d\big((X,Y),(x_0,y(x_0))\big) = \ell$: $(X-x_0)^2 + (Y-y_0)^2 = \ell^2$ (2)

(X,Y) leží na kružnici : $X^2 + Y^2 = R^2$ (3)

$(1),(2) \Rightarrow \quad (X-x_0)^2\left[1+y'^2\right] = \ell^2$

$$X - x_0 = \ominus\, \ell / \sqrt{1+y'^2}$$

ta predznak, ker iz skice preberš, daje $X - x_0 < 0$

$$Y - \underset{\substack{\parallel \\ y(x_0)}}{y_0} = \ominus\, \ell y' / \sqrt{1+y'^2}$$

$$(3) \Rightarrow \quad \left(x_0 - \frac{\ell}{\sqrt{1+y'^2}}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{\ell y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)^2 = R^2 \qquad \Big/ \begin{matrix} x_0 \to x \\ y_0 \to y \end{matrix}$$

$$\left(x - \frac{\ell}{\sqrt{1+y'^2}}\right)^2 + \left(y - \frac{\ell y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 + \ell^2 - \frac{2\ell}{\sqrt{1+y'^2}}\,(x + y y') = R^2$$

(3b) $x = r(\varphi)\cos\varphi$

$y = r(\varphi)\sin\varphi$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\varphi}{dx/d\varphi} = \frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}$$

$$1+y'^2 = 1+\left(\quad\right)^2 = \frac{r'^2+r^2}{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^2}$$

$$x+yy' = r\cos\varphi + r\sin\varphi\,\frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi} = \frac{rr'}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}$$

(3e) $$\Rightarrow R^2 - l^2 - r^2 = -\frac{2lrr'}{\sqrt{r^2+r'^2}}\,\underbrace{\frac{|r'\cos\varphi - r\sin\varphi|}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}}_{\operatorname{sgn}\left(\frac{dx}{d\varphi}\right) = -1}$$

iz slike, ker je x padajoča funkcija φ

(3c) $$-r^2 = \frac{2lrr'}{\sqrt{r^2+r'^2}} \quad /\sqrt{r^2+r'^2},\ (\quad)^2$$

$$r^4(r^2+r'^2) = 4l^2r^2r'^2 \quad /:r^2$$

$$r^4 + r^2r'^2 = 4l^2r'^2$$

$$r'^2 = \frac{r^4}{(2l)^2 - r^2} \Rightarrow r' = \pm\frac{r^2}{\sqrt{(2l)^2-r^2}}$$

iz slike, ker $r(\varphi)$ padajoča fja

$$-d\varphi = \frac{dr\sqrt{(2l)^2-r^2}}{r^2}$$

$r = 2l\sin\theta$

$$-\varphi + K = \int \frac{dr\sqrt{(2l)^2-r^2}}{r^2} = \int \operatorname{ctg}^2\theta\, d\theta = \int\frac{d\theta}{\sin^2\theta} - \int d\theta$$

$$= -\operatorname{ctg}\theta - \theta = -\frac{\sqrt{(2l)^2-r^2}}{r} - \arcsin\frac{r}{2l}$$

$r(\varphi=0) = 2l \Rightarrow K = -\pi/2$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\sqrt{(2l)^2-r^2}}{r} + \arcsin\frac{r}{2l} - \frac{\pi}{2}$$

(4) 1) Dovolj je pokazati, da za rešitev $x=x(t)$, $y=y(t)$ (def. kjerkoli) velja $x^2(t)+y^2(t)<1$ $\forall t \in$ (def. obm. za rešitev)

Saj v tem primeru lahko zaporedama uporabimo OIEEHDE pri npr. $a=1$, $b=1$ in bo veljalo

$$M = \max_{\substack{d((x,y),\text{tč. iz zač. pogoja}) \le 1}} \left\| \begin{bmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{bmatrix} \right\| \le \max_{d((x,y),(0,0)) \le 2} \left\| \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \right\| =: M_0 < \infty$$

ker je to komp. množica in fg zvezna

Saj je točka iz zač. pogoja v enotskem krogu.

Potem je $c = \min\{1, \frac{1}{M}\} \ge \min\{1, \frac{1}{M_0}\} > 0$

spodaj omejen s poz. št., ki ni odvisno od zač. točke v začetnem pogoju, in zato z zaporednimi aplikacijami OIEEHDE pridemo poljubno daleč.

2) Zakaj je $x^2(t)+y^2(t)<1$ $\forall t \in$ (def. obm. za rešitev)? Dokaz s protišt.

Če bi bilo za nek t $x^2(t)+y^2(t) \ge 1$, bi zaradi $x(0)^2+y(0)^2<1$ in zveznosti $t \mapsto x^2(t)+y^2(t)$ $\exists t_0$ $\ni$: $x^2(t_0)+y^2(t_0)=1$. BŠS: $t_0>0$ (primer $t_0<0$ se obravnava podobno). Naj bo $t_1 := \min_{t'>0} \{t' : x^2(t')+y^2(t')=1\}$. Tak t_1 $\exists$, ker je D neprazna ($t_0 \in D$)

4 nadaljevanje

in zaprta. Velja $t_1 > 0$, sej zaradi $x^2(0) + y^2(0) < 1$ tudi za t je na neki okolici 0 velja $x^2+y^2<1$. Do protislovja pridemo tako, da pokažemo, da obstaja rešitev C.n.

$$\left.\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= f(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ \dot{\tilde{y}} &= g(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ \tilde{x}(t_1) &= x(t_1), \quad \tilde{y}(t_1) = y(t_1) \end{aligned}\right\} (\square)$$

na okolici t_1 z lastnostjo $\tilde{x}^2+\tilde{y}^2=1$, sej mora potem zaradi lok. enolnosti na tej okolici veljati tudi $x^2+y^2=1$, kar je v protislovju z našo def. t_1

Preostane dokazati obstoj take (lok.) rešitve $\tilde{x}, \tilde{y}$, iz $\cancel{f(x,y)}$ $f(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi + g(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi = 0 \quad \forall \varphi$

sledi
$$\begin{aligned} f(\cos\varphi, \sin\varphi) &= \alpha(\varphi)\sin\varphi \\ g(\cos\varphi, \sin\varphi) &= -\alpha(\varphi)\cos\varphi \end{aligned} \quad \forall \varphi$$

za neko zvezno fjo $\alpha(\varphi)$. Označimo $x(t_1) = \cos\varphi_0$, $y(t_1) = \sin\varphi_0$.

Cauchyjeva naloga (za funkcijo $\varphi = \varphi(t)$):

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= -\alpha(\varphi) \\ \varphi(t_1) &= \varphi_0 \end{aligned}$$

ima rešitev na okolici t_1 (po OIEGANDE); potem

je
$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \cos\varphi(t) \\ \tilde{y}(t) &= \sin\varphi(t) \end{aligned}$$
iskana rešitev $(\square)$