1	
2	
3	
4	
Σ	

Analiza 3: 1. kolokvij

5. 12. 2013

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 105 točk. Veliko uspeha!

Sedež (2.01)

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$xy'' = 2y'^2 - 4xy' - 2y' + 2x^2 + 3x.$$

Z uvedbo $z = y'$ najprej enačbi znižamo red. Dobimo

$$xz' = 2z^2 - 4xz - 2z + 2x^2 + 3x.$$

Enačba je Ricattijeva. Ena od rešitev je $z(x) = x$. Z nastavkom $z = x + \frac{1}{w}$ se enačba prevede na linearno enačbo 1. reda

$$-xw' = 2 - 2w.$$

Ta enačba je celo enačba z ločljivimi spremenljivkami. Ločimo spremenljivke, integriramo obe strani v enakosti

$$\int \frac{dw}{w-1} = 2\int \frac{dx}{x}$$

in dobimo $w = Cx^2 + 1$. Odtod sledi

$$y' = z = x + \frac{1}{Cx^2+1}.$$

Sedaj ločimo dva primera. Če je $C > 0$, dobimo

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{\sqrt{C}}\mathrm{arctg}(\sqrt{C}x) + D.$$

Če je $C < 0$, dobimo

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2\sqrt{-C}}\ln|1-\sqrt{-C}x| + \frac{1}{2\sqrt{-C}}\ln|1+\sqrt{-C}x| + D.$$

2. naloga (25 točk)

Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y'^2 = x + y.$$

Če obstaja, določi še singularno rešitev.

Enačba je Lagrangeeva, zato jo rešujemo parametrično. Uvedemo

$$\begin{array}{rcl} X & = & u \\ Y & = & v^2 - u \\ Z & = & v \end{array} .$$

Pogoj $ZdX = dY$ implicira

$$vdu = 2vdv - du$$

oziroma

$$\int du = \int \frac{2v}{v+1} dv = \int \left(2 - \frac{2}{v+1}\right) dv.$$

Odtod sledi

$$u = 2v - 2\ln|v+1| + C.$$

Splošna rešitev enačbe je torej

$$\begin{array}{rcl} x(v) & = & 2v - 2\ln|v+1| + C \\ y(v) & = & v^2 - 2v + 2\ln|v+1| - C \end{array} .$$

Seveda opazimo singularno rešitev tudi med reševanjem parametrično podane diferencialne enačbe. V eni fazi smo delili z $v + 1$, oziroma $y' + 1$. To lahko storimo le, če ta funkcija ni ničelna. V primeru $y' + 1 = 0$, je $y = -x + C$. Če vstavimo v našo enačbo, dobimo $C = 1$.

Zgorno utemeljitev lahko zapišemo bolj teoretično. Ker ne moremo dobiti implicitno podane splošne rešitve $G(x, y, C) = 0$, si z ogrinjačo ne moremo pomagati. Tudi drugi postopek za določevanje singularne rešitve odpade, saj za $F(x, y, y') = y'^2 - x - y$ iz $F(x, y, y') = 0$ in $F_{y'}(x, y, y') = 0$ sledi

$$y'^2 = x + y \qquad \text{in} \qquad 2y' = 0.$$

Torej je $y' = 0$ in zato $y = -x$, ki pa ne reši naše diferencialne enačbe. Zato si moramo pomagati z določevanjem singularne rešitve tako, da upoštevamo dejstvo, da imamo Lagrangeevo enačbo. Če je $y = f(y')x + g(y')$ splošna Lagrangeeva enačba, singularno rešitev dobimo tako, da si ogledamo negibne točke funkcije f. Torej rešujemo enačbo $f(x) = x$. V našem primeru je $f = -1$. Torej je $y = -x + g(-1) = -x + 1$ naša singularna rešitev.

3. naloga (25 točk)

Podana je Cauchyjeva naloga

$$y' = \frac{1}{x^2 + y^2}, \qquad y(0) > 0.$$

a) Dokaži, da ima zgornja Cauchyjeva naloga enolično zvezno odvedljivo rešitev, ki je definirana na celotni realni osi.

b) Dokaži, da obstaja končna limita

$$\lim_{x \to \infty} y(x).$$

a) Funkcija $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ je razreda $\mathcal{C}^1$ povsod na $\mathbb{R}^2$ razen v točki $(0, 0)$. Naj bo $a > 0$ poljuben, $b > 0$ pa tak, da je $y(0) - b > 0$. Tedaj je funkcija f Lipschitzova v drugi spremenljivki na pravokotniku $[-a, a] \times [y(0) - b, y(0) + b]$, kar po lokalnem eksistenčnem izreku pomeni, da obstaja zvezno odvedljiva funkcija na intervalu $(-c, c)$ in reši našo Cauchyjevo nalogo. Naj bo sedaj $m > c$. Na množici $[c/2, m] \times \mathbb{R}$ velja

$$|f(x, y) - f(x, z)| = \left| \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x^2 + z^2} \right| \leq |y - z| \cdot \frac{|z| + |y|}{(x^2 + y^2)(x^2 + z^2} \leq M|y - z|,$$

kjer smo z M označili maksimum funkcije $\frac{|z|+|y|}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}$ na $[c/2, m] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Po globalnem eksistenčnem izreku obstaja rešitev Cauchyjeve naloge na vsakem intervalu oblike $[c/2, m]$. Podobno storimo za interval $[-m, -c/2]$. Zaradi edinosti imamo torej rešitev Cauchyeve naloge na intervalih oblike $[-m, m]$. Ker je bil $m > c$ poljuben, imamo natanko eno rešitev Cauchyjeve naloge na $\mathbb{R}$.

Naloge se lahko lotimo tudi na naslednji način. Po lokalnem eksistečnem izreku imamo rešitev na intervalu $(-c, c)$. Zanima nas, do kod lahko najdlje pridemo z večkratno uporabo izboljšane verzije lokalnega eksistenčnega izreka. Naj bo $x' > 0$ in na neki odprti okolici točke x' imamo rešitev y Cauchyjeve naloge

$$y' = f(x, y), \qquad y(x') = y'.$$

Dokazali bomo, da je c, ki ga dobimo z izboljšano verzijo lokalnega eksistenčnega izreka, neodvisen od izbire točke x'. Naj bo $a' > 0$ in $P = [a', b'] \times [c', d']$ poljuben pravkotnik. Tedaj je

$$\max_P |f| = \max_P \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\min_P(x^2 + y^2)} \geq \frac{1}{a'^2}.$$

Odtod se hitro izpelje, da lahko izberemo c, ki je neodvisen od x' za $x' > 0$. Podobno lahko storimo za $x' < 0$.Zaradi edinosti rešitve Cauchyjeve naloge imamo rešitev, ki je definirana na celotni realni osi.

b) Ker je $y' > 0$ na $\mathbb{R}$, je funkcija y naraščajoča in zato velja $y(x) > y(0)$ za vse $x > 0$. Za $x > 0$ velja

$$y(x) = y(0) + \int_0^x \frac{dt}{t^2 + y(t)^2} \leq y(0) + \int_0^x \frac{dt}{t^2 + y(0)^2} = y(0) + \frac{1}{y(0)} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y(0)}\right) \leq y(0) + \frac{\pi}{2y(0)}.$$

Ker je funkcija y naraščajoča in navzgor omejena, obstaja končna limita iz naloge.

4. naloga (30 točk)

Ali obstaja zvezno odvedljiva nenegativna naraščajoča funkcija y, definirana na intervalu $[0, \infty)$ z naslednjo lastnostjo: za vse $x > 0$ je dolžina grafa funkcije y nad intervalom $[0, x]$ enaka abscisi presečišča tangente na graf funkcije y v točki $(x, y(x))$ z abscisno osjo? Odgovor utemelji!

Dolžina grafa funkcije y nad intervalom $[0, x]$ je enaka

$$\int_0^x \sqrt{1+y'^2}dt.$$

Tangenta na graf funkcije y v točki $(x, y(x))$ seka abscisno os v točki $X = x - \frac{y}{y'}$. Geometrijski pogoj iz naloge je

$$x - \frac{y}{y'} = \int_0^x \sqrt{1+y'^2}dt.$$

Z odvajanjem zgornje enačbe in preureditvijo dobimo

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{yy''}{y'^2}.$$

Ker v zgornji enačbi ne nastopa neodvisna spremenljivka x, uvedemo $z(y) = y'$. Tedaj je $y'' = \dot{z}z$, kjer $\dot{z}$ označuje odvod po novi neodvisni spremenljivki y. Dobimo

$$\sqrt{1+z^2} = \frac{yz\dot{z}}{z^2}.$$

Jasno $z \neq 0$, sicer je y konstantna funkcija in zato ne zadošča geometrijskemu pogoju naloge. Pokrajšamo s funkcijo z, preuredimo in dobimo enačbo z ločljivimi spremenljivkami. Hkrati še integriramo, da dobimo

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2+1}} = \int \frac{dy}{y}.$$

Drugi integral je zelo osnoven, prvi je malce težji. Lahko se ga lotimo z uvedbo nove spremenljivke $w = \sqrt{z^2+1}$. Tudi $z = \text{sh}w$ deluje, vendar je z uvedbo $w = \sqrt{z^2+1}$ izintegrirani izraz lažje zmanipulirati. Dobimo

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2+1}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{z^2+1}-1}{\sqrt{z^2+1}+1}\right| + C = \ln\left|\frac{z}{\sqrt{z^2+1}+1}\right| + C.$$

Odtod sledi

$$\ln\left|\frac{y'}{\sqrt{y'^2+1}+1}\right| = \ln|y| + D$$

in zato tudi

$$\frac{y'}{\sqrt{y'^2+1}+1} = Ey$$

oziroma

$$y' = Ey + Ey\sqrt{y'^2+1}.$$

Preuredimo do enakosti $(y' - Ey) = Ey\sqrt{y'^2+1}$ in kvadrirajmo. Dobimo

$$y'^2 - 2Eyy' = E^2y^2y'^2.$$

Krajšamo z y' in dobimo enačbo z ločljivimi spremenljivkami. Imamo

$$\int \frac{1-E^2y^2}{y}dy = 2E\int dx$$

oziroma

$$\ln y - \frac{E^2y^2}{2} = 2Ex + C,$$

saj je funkcija y nenegativna. Naravni geometrijski pogoj naloge je $y(0) = 0$, kar pa ne more veljati v našem primeru.