ANALIZA 3 - 1. kolokvij

29. 11. 2010

Ime in priimek:
Vpisna št.:

1. [25] Poišči splošno rešitev naslednje DE

$$y' = xy + x^3y^2.$$

Enačba je Riccatti-jeva; ugeneš rešitev $y=0$

ALI

Enačba je Bernoullijeva

↓

V obeh primerih pridеš do nove spr. $y = \frac{1}{z}$

$$-\frac{z'}{z^2} = \frac{x}{z} + x^3/z^2 \quad / \cdot z^2$$

$$-z' = xz + x^3, \quad \text{hom: } -z' = xz \to z = Ke^{-x^2/2}$$

Variacija konst.! $z = K(x)\,e^{-x^2/2}$

$$-K'e^{-x^2/2} = x^3$$

$$K' = -x^3e^{x^2/2}$$

$$K = \int -x^3 e^{x^2/2}dx = \int \underbrace{-2u}_{w}\,\underbrace{e^u du}_{dv} \underset{\text{p.p.}}{=} -2ue^u + \int 2e^u du = -2ue^u + 2e^u + C$$

$u = x^2/2$, $du = x\,dx$; $dw = -2du$, $v = e^u$

$$z = Ce^{-x^2/2} + 2\left(1 - \frac{x^2}{2}\right), \quad y = \frac{1}{\cdots}$$

2. [25] Parametrično poišči splošno rešitev naslednje DE

$$x + y + y' + y'^2 + y'^3 = 0.$$

Ali ima ta DE kako singularno rešitev ?

$$\left(\begin{array}{l} x= \\ y= \\ y'= \end{array}\right) \begin{array}{l} X = u \\ Y = -u - v - v^2 - v^3 \\ Z = v \end{array} \qquad \left(\text{lahko bi tudi: } \begin{array}{l} X = -u - v - v^2 - v^3 \\ Y = u \\ Z = v \end{array}\right)$$

konsistentnost: $v = Z = \frac{dY}{dX} = \frac{-du - dv(1+2v+3v^2)}{du}$

$$v\,du = -du - dv(1+2v+3v^2)$$
$$(v+1)\,du = -dv\,(1+2v+3v^2)$$
$$-du = dv\,\frac{1+2v+3v^2}{1+v}$$

$$-u + C = \int dv\,\frac{1+2v+3v^2}{1+v} = \int dw\,\frac{1+2w-2+3w^2+3-6w}{w}$$

$1+v=w$
$v=w-1$

$$= \int dw\,\frac{2-4w+3w^2}{w} =$$
$$= 2\ln(1+v) - 4(1+v) + \frac{3}{2}(1+v)^2$$

Rešitev:
$$\boxed{\begin{array}{l} x = -2\ln(1+v) + 4(1+v) - \frac{3}{2}(1+v)^2 + C \\ y = -C + 2\ln(1+v) - 4(1+v) + \frac{3}{2}(1+v)^2 - v - v^2 - v^3 \end{array}}$$

sing. reš? $F_{y'} = 0 \to 1 + 2y' + 3y'^2 = 0$, Diskr. $= 2^2 - 4\cdot 3\cdot 1 < 0$

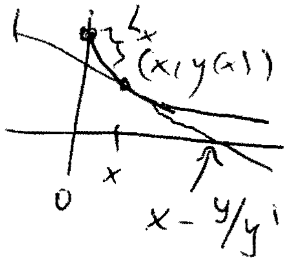
$\Rightarrow$ ni realnih reš. za y' $\to$ ni sing. reš.

3. [25] Naj bo $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ strogo padajoča gladka funkcija, za katero velja $y(0) = 1$ ter je za vsako tangento ločna dolžina grafa $y(x)$ med ordinatno osjo in dotikališčem tangente na graf $y(x)$ enaka x-koordinati presečišča te tangente z abscisno osjo. Zapiši enačbo, ki ji mora zadoščati $y(x)$, jo odvajaj in reši.

Pomoč: Ločna dolžina grafa gladke funkcije $y(x)$ nad intervalom $[a, b]$ je

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx.$$

1/2



$$(L_x =) \int_0^x \sqrt{1+y'^2}\, dx = x - y/y' \quad /\ '$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \cancel{1} - \cancel{\frac{y'}{y'}} + \frac{y y''}{y'^2}$$

$$z(y) = y'(y)$$

$$y'' = \frac{d}{dx} y' = \frac{dy}{dx}\frac{dz}{dy} = \dot{z} z$$

$$\sqrt{1+z^2} = \frac{y \dot{z} z}{z^2} = \frac{y \dot{z}}{z}$$ ← ločljive spremenljivke

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z\sqrt{1+z^2}}$$

$$\ln y = \int \frac{dz}{z\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{z\,dz}{z^2\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{u\,du}{(u^2-1)u} = \int \frac{du}{u^2-1}$$

$$1+z^2 = u^2$$

$$= \int \frac{du}{2}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{u-1}{u+1} + C$$

$$\cdot \frac{\sqrt{\ } + 1}{\sqrt{\ } + 1}$$

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1+z^2} - 1}{\sqrt{1+z^2} + 1} + C$$

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln \frac{z^2}{(\sqrt{1+z^2}+1)^2} + C$$ (se nadaljuje)

3. [25] Naj bo $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ strogo padajoča gladka funkcija, za katero velja $y(0) = 1$ ter je za vsako tangento ločna dolžina grafa $y(x)$ med ordinatno osjo in dotikališčem tangente na graf $y(x)$ enaka x-koordinati presečišča te tangente z abscisno osjo. Zapiši enačbo, ki ji mora zadoščati $y(x)$, jo odvajaj in reši.

Pomoč: Ločna dolžina grafa gladke funkcije $y(x)$ nad intervalom $[a, b]$ je

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx.$$

2/2 (nedeljevanje)

$$\ln y = \ln \frac{z}{1+\sqrt{1+z^2}} + c$$

$$y = K \frac{z}{1+\sqrt{1+z^2}}, \quad \text{ker } z = y' \xrightarrow{x \to 0} -\infty \text{ in } y \xrightarrow{x\to 0} 1$$

$$\Downarrow$$

$$K = -1$$

$$y = \frac{-y'}{1+\sqrt{1+y'^2}} \to y + y\sqrt{1+y'^2} = -y'$$

$$y + y' = -y\sqrt{1+y'^2} \quad /^2$$

$$\cancel{y^2} + y'^2 + 2yy' = \cancel{y^2} + y^2 y'^2 \quad /: y' \; (\neq 0$$

iz slike)

$$y' + 2y = y^2 y'$$

$$y'(1-y^2) = -2y$$

$$y' = \frac{-2y}{1-y^2} \to dy\,\frac{1-y^2}{y} = -2dx \to \ln y - \frac{y^2}{2} = -2x + D$$

$$\text{ker } y(\underset{x}{0}) = 1 \Rightarrow D = -\tfrac{1}{2}$$

$$\boxed{-2x - \tfrac{1}{2} = \ln y - \tfrac{y^2}{2}}$$

4. [25] Dana je Cauchyjeva naloga $f(x,y)$

$$y' = -\frac{y}{1+y^2+x^2}, \quad y(0) = 1.$$

(a) Pokaži, da ima ta naloga rešitev definirano na celem $\mathbb{R}$.

(b) Pokaži, da za to rešitev velja $y > 0$.

(a) f je omejen na $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, saj velja $\lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y) = 0$.

Zato je po izreku z vaj (domnevam, tudi s predavanj) y definirana povsod.

(b) Dokaz s protislovjem: če $\exists \tilde{x}_0 \ni: y(\tilde{x}_0) \leq 0$, zaradi zveznosti y in dejstva $y(0)=1$ $\exists x_0 \ni: y(x_0) = 0$. Oglejmo si Cauchyjevo nalogo

$$z' = f(x,z)$$
$$z(x_0) = 0.$$

Rešita jo $z = y(x)$ in $\cancel{z}$ $z \equiv 0$. Ker je $f \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ velja globalna enoličnost rešitve,

torej $y(x) \equiv 0$, toda $y(0) = 1$ je protislovje z $y(x) \equiv 0$.