ANALIZA 3 - 1. kolokvij

29. 11. 2012

Ime in priimek:
Vpisna št.:

1. [20] Poišči splošno rešitev naslednje NDE

$$y' - y/x = (1 + \ln x)y^3.$$

2. [25] Poišči splošno rešitev naslednje NDE

$$(x^2y^2 + 3y)\,dx + (2x^3y - 3x)\,dy = 0,$$

če veš, da obstaja integrirajoči množitelj oblike $\mu(x, y) = x^\alpha y^\beta$, kjer sta $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3. [30] Pri izdelavi žarometa mora biti odbojna površina, ki obdaja žarnico, take oblike, da vse svetlobne žarke iz žarnice odbije v isto smer. Če predpostavimo, da je odbojna površina ploskev, dobljena z rotacijo grafa krivulje $y = y(x)$ okoli osi y ter da žarnica leži v točki $X = (0, a)$ ($a > 0$), mora torej graf funkcije $y = y(x)$ zadoščati naslednjemu pogoju: za vsako točko T na grafu mora biti kot med daljico TX in normalo na graf v točki T enak kotu med isto normalo in y osjo. Poišči vse (gladke) funkcije $y = y(x)$, ki zadoščajo temu pogoju.

   Pomoč: Kot α med vektorjema $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{R}^2$ dobiš iz

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}}{\|\vec{v_1}\|\,\|\vec{v_2}\|}.$$

4. [25] Naj $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ zadošča pogojema

$$f(x, 0) = f(x, 1) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   Dokaži, da ima Cauchyjeva naloga

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = 1/2$$

   rešitev, ki je definirana na celem $\mathbb{R}$.

① $y' = y/x + (1+\ln x)\, y^3 \; / : y^3$ Bernoulli

$y'/y^3 = \frac{1}{y^2}\frac{1}{x} + (1+\ln x)$ $\frac{1}{y^2} = z, \quad z' = -2\frac{1}{y^3}y'$

$-\frac{1}{2} z' = z\frac{1}{x} + (1+\ln x)$

Hom $-\frac{1}{2} z' = \frac{z}{x}$ $-\frac{1}{2}\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$

$\ln z = -2\ln x + \tilde{C}$

$z = \frac{c}{x^2}$

Var. konst. ! $z' = c'/x^2 - 2c/x^3$

$-\frac{1}{2}\frac{c'}{x^2} + \cancel{\frac{c}{x^3}} = \cancel{\frac{c}{x^3}} + (1+\ln x)$

$c' = -2x^2(1+\ln x)$

$C = -2\int x^2 + x^2\ln x = -2\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right) + A$

$y = \dfrac{1}{\pm\sqrt{\frac{A}{x^2} - 2\left(\frac{2x}{9} + \frac{x}{3}\ln x\right)}}$

② $P\,dx + Q\,dy = 0$, $P = x^{2+\alpha} y^{2+\beta} + 3x^{\alpha} y^{\beta+1}$

$Q = 2x^{3+\alpha} y^{1+\beta} - 3x^{\alpha+1} y^{\beta}$

exakt ist : $P_y = Q_x$

$$(2+\beta)\, x^{2+\alpha} y^{1+\beta} + 3(\beta+1)\, x^{\alpha} y^{\beta} = 2(3+\alpha)\, x^{2+\alpha} y^{1+\beta} - 3(\alpha+1)\, x^{\alpha} y^{\beta}$$

$$(2+\beta-6-2\alpha)\, x^{2+\alpha} y^{1+\beta} = (-3\alpha-3\beta-6)\, x^{\alpha} y^{\beta} \quad /: x^{\alpha} y^{\beta}$$

$$(\beta-2\alpha-4)\, x^2 y = -3(\alpha+\beta+2)$$

$$\Rightarrow \beta-2\alpha-4=0, \quad \alpha+\beta+2=0$$

$$\Rightarrow \alpha=-2 \quad \beta=0$$

$$\Rightarrow \quad F_x = y^2 + 3x^{-2} y, \quad F_y = 2xy - 3x^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$F = \int F_x\,dx = xy^2 - 3x^{-1}y + C(y)$$

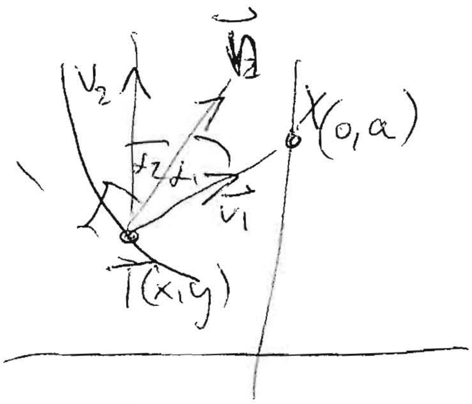
$$\Downarrow$$

$$F_y = 2xy - 3x^{-1} + C'(y) = 2xy - 3x^{-1} \Rightarrow C' = 0$$

$$\Rightarrow C(y) = D$$

$$\Rightarrow \quad \underline{xy^2 - 3y/x = D}$$

③



$$\bar{v}_1 = (-x, a-y), \quad \bar{v}_2 = (0,1), \quad \bar{n} = (-y', 1)$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{\bar{v}_1 \cdot \bar{n}}{\|\bar{v}_1\| \cancel{\|\bar{n}\|}} = \frac{\bar{v}_2 \cdot \bar{n}}{\|\bar{v}_2\| \cancel{\|\bar{n}\|}} = \cos\alpha_2$$

$$\frac{xy' - (y-a)}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}} = \frac{1}{1}$$

$$xy' - (y-a) = \sqrt{x^2+(y-a)^2} \quad / \qquad y-a = z, \quad y' = z'$$

$$xz' - z = \sqrt{x^2+z^2} \,/ : x^2 \text{ homogena} \quad \frac{z}{x} = u$$

$$\frac{xz' - z}{x^2} = \frac{1}{x}\sqrt{1+\left(\frac{z}{x}\right)^2}$$

$$u' = \frac{1}{x}\sqrt{1+u^2}$$

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x} \quad / \int$$

$$\ln(u+\sqrt{1+u^2}) = \ln x + \ln C$$

$$u + \sqrt{1+u^2} = Cx$$

$$\sqrt{1+u^2} = Cx - u \quad /^2$$

$$1 + \cancel{u^2} = C^2x^2 - 2Cxu + \cancel{u^2}$$

$$2C\underbrace{xu}_{z} = C^2x^2 - 1$$

$$2C(y-a) = C^2x^2 - 1 \rightarrow$$

$$\boxed{y = a + \frac{Cx^2}{2} - \frac{1}{2C}}$$

4 Naj bo $(a,b) \ni 0$ maximalen interval za y, ki reši dano C.n.

Ker $y_0=0$ in $y_0=1$ rešita dano ~~E~~ NDE, mora biti $\underline{0<y(x)<1} \quad \forall x \in (a,b)$.

Če bi namreč $y(x)$ bil kje ≥ 1, bi po zveznosti (ker $y(0)=\frac{1}{2}$) ~~Bra~~ $\exists x_0 \ni: y(x_0)=1$.

Potem pa zaradi globalne enoličnosti za C.n. $z'=f(x,z)$, $z(x_0)=1$

velja $y_0=y$ ✗ $y(0)=1/2$. Torej $y(x)<1$.

Podobno dokažemo $y(x)>0$.

Torej je $\underline{y(x) \text{ omejena}}$. Če bi bil $b \in \mathbb{R}$, bi po izreku zvaj $y(x) \xrightarrow{x \to b} \begin{matrix} +\infty \\ \text{ali} \\ -\infty \end{matrix}$, kar je v protislovju z omejenostjo $y(x)$.

Torej $b=\infty$. Podobno $a=-\infty$.