ANALIZA 4 - 2. pisni izpit

26. 8. 2009

1. [25] Poišči potreben in zadosten pogoj za funkcijo $h \in C^1(\mathbb{R})$, da bo naloga za funkcijo $u(x,t)$:

$$u_t + uu_x = 0, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}$$

$$u(x, t = 0) = h(x)$$

imela (gladko) rešitev za vse nenegativne t; tj. rešitev iz prostora $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$.

2. [25] Dana je naloga za funkcijo $u(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{x-y}{3}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$u(x,-x) = \frac{3}{2x}e^{2x^2/3}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x,-x) = \frac{1}{2}e^{2x^2/3}.$$

Nalogo želimo rešiti na naslednji način: najprej prepiši PDE in drugi začetni pogoj za funkcijo $v(x,y) := \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$ in tako dobljeno nalogo reši. Tako dobljen $\frac{\partial u}{\partial x}$ in prvi začetni pogoj uporabi pri določitvi rešitve u.

3. [25] Z metodo separacije spremenljivk poišči rešitev naslednje naloge:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 \frac{\partial u}{\partial x}\right) = x\frac{\partial u}{\partial t}, \quad x \in [1,4], t > 0,$$

$$u(x, t = 0) = x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x = 1, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x = 4, t) = 0.$$

4. [25] Naj bo $P((x,y),(x',y'))$ Poissonovo jedro za enotski krog B^2, $G((x,y),(x',y'))$ pa Greenova funkcija za enotski krog B^2. Izračunaj integrala

$$\int_{\partial B^2} P((x,y),(x',y'))x'^2 \, ds_{x',y'}, \qquad \int_{B^2} G((x,y),(x',y'))(x'^2+y'^2)^2 \, dx' \, dy'.$$