ANALIZA 4 - 6. izpit

9. 2. 2007

1. (a) [10] Naj bosta $F(x, y, u), G(x, y, u)$ gladki funkcionalno neodvisni funkciji. Če označimo $(A_1, A_2, A_3) = \nabla F \times \nabla G$, dokaži, da kvazilinearno PDE 1. reda

$$A_1 u_x + A_2 u_y = A_3$$

reši vsaka z enačbo

$$F(x, y, u) = C_1$$

implicitno podana funkcija $u(x, y)$ (tu je C_1 poljubno realno število). Dokaži, da isto velja za funkcijo, ki je implicitno podana z

$$G(x, y, u) = C_2.$$

(b) [5] Zapiši kvazilinearno PDE 1. reda, ki jo reši vsaka funkcija oblike

$$u(x, y) = 1 + C_1 xy$$

(pri poljubni vrednosti realnega parametra C_1) ter vsaka funkcija oblike

$$u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + C_2^2}$$

pri poljubni vrednosti realnega parametra C_2.

(c) [10] Poišči tisto rešitev kvazilinearne PDE 1. reda iz točke (b), ki zadošča pogoju $u(x, y) = x + 1$ za vse $x, y > 0, xy = 1$.

2. [25] Poišči rešitev linearne PDE 2.reda

$$x^3 u_{xx} - 2x^2 y u_{xy} + y^2 x u_{yy} + 2x^2 u_x + y^2 x u = 0,$$

ki zadošča pogojema $u(x, \pi) = e^x$, $u_y(x, \pi) = 0$ za $x > 0$.

Pomoč: Nalogo rešuj v takih koordinatah kanonične forme, da v PDE parcialnih odvodov u prvega reda ni.

3. [25] Dano je območje

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4,\ x, y > 0\}.$$

Reši naslednjo nalogo za funkcijo $u(x, y, t)$:

$$u_{tt} - \triangle u = 0, \quad \text{na } \Omega \times \mathbf{R}_+,$$

$$u(x, y, t) = 0, \quad \text{za} \quad t \geq 0, (x, y) \in \partial\Omega,$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad \text{na } \Omega,$$

$$u_t(x, y, 0) = 1, \quad \text{na } \Omega.$$

4. (a) [10] Naj bo $f \in C_c(\mathbf{R})$ in T neka distribucija. Pokaži, da predpis

$$(T * f) : C_c^\infty(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R},$$

$$\varphi \mapsto T([x \mapsto f(-x)] \star \varphi)$$

podaja distribucijo. Tu smo z $\star$ označili konvolucijo iz teorije Fouriereve transformacije.

(b) [5] Označimo s T_h distribucijo porojeno z običajno funkcijo $h \in C(\mathbf{R})$. Če je $g \in C(\mathbf{R})$, $f \in C_c(\mathbf{R})$, dokaži

$$T_g * f = T_{g \star f}.$$

(c) [5] Dokaži $\delta_0 * f = T_f$.

(d) [5] Dokaži $T' * f = (T * f)'$.